

TABLE DES MATIÈRES

1	CALCUL DIFFÉRENTIEL	1
1.1	Différentiabilité	1
1.1.1	Applications différentiables	2
1.1.2	Lemme fondamental de composition	6
1.1.3	Inégalité des accroissements finis	7
1.1.4	Utilisations de la différentielle	8
1.2	Inversion locale et fonctions implicites	9
1.2.1	Fonctions inverses, fonctions implicites	10
1.2.2	Applications	11
1.2.3	Variantes	13
1.3	Optimisation	15
1.3.1	Existence et unicité	16
1.3.2	Localisation et calcul différentiel	16
1.3.3	Optimisation numérique	22
1.4	Développements de Taylor	24
1.4.1	Développement local	24
1.4.2	Développement global	25
1.5	Fonctions convexes	26
1.5.1	Ensembles convexes	26
1.5.2	Fonctions convexes	27
1.5.3	Fonctions convexes différentiables	28
1.5.4	Fonctions convexes et optimisation	30
1.6	Exercices corrigés	30
2	FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE	45
2.1	Séries entières	47
2.1.1	Rayon de convergence	47
2.1.2	Au bord du disque de convergence	49
2.2	Fonctions analytiques	51
2.2.1	Fonctions développables en série entière	51

2.2.2	Factorisation	51
2.2.3	Théorème des zéros isolés	53
2.2.4	Fonctions analytiques réelles	54
2.3	Fonctions holomorphes	56
2.3.1	Holomorphicité VS calcul différentiel réel	56
2.3.2	Applications conformes	58
2.3.3	Fonctions holomorphes et inversion locale	61
2.4	Conséquences de la théorie de Cauchy	62
2.4.1	Formule de Cauchy	62
2.4.2	Lien holomorphicité – développements en série	63
2.4.3	Résidus	66
2.4.4	Holomorphicité sous le signe somme	67
2.4.5	Familles de fonctions holomorphes	69
2.5	Fonctions harmoniques	71
2.5.1	Harmonicité et holomorphicité	71
2.5.2	Harmonicité et propriété de la moyenne	72
2.5.3	Principe du maximum	72
2.6	Compléments	73
2.6.1	L’anneau des fonctions holomorphes	73
2.6.2	Algèbre de Banach complexe	74
2.6.3	Déterminations	74
2.7	Exercices corrigés	77

3 ANALYSE FONCTIONNELLE 91

3.1	Analyse hilbertienne	91
3.1.1	Espace muni d’un produit scalaire	91
3.1.2	Théorème de projection	95
3.1.3	Dualité	103
3.1.4	Bases hilbertiennes	107
3.1.5	Polynômes orthogonaux	110
3.1.6	Compléments	112
3.2	Convolution	113
3.2.1	Propriétés de la convolution	114
3.2.2	Convolution et régularisation	116
3.2.3	Identités approchées	119
3.3	Séries de Fourier	122
3.3.1	Aspect hilbertien	123
3.3.2	Algèbre de convolution $L^1(\mathbb{T})$	125
3.3.3	Convergence au sens de Cesàro	127
3.3.4	Convergence ponctuelle	129
3.3.5	Régularité et estimation	131
3.3.6	Applications	132
3.4	Exercices corrigés	133

4	ALGÈBRE LINÉAIRE	147
4.1	Théorie de la dimension	148
4.1.1	Bases et dimension	148
4.1.2	Dimension et applications linéaires	151
4.1.3	Théorème du rang	153
4.1.4	Rang et matrices équivalentes	155
4.1.5	Calcul du rang	156
4.2	Réduction des endomorphismes	157
4.2.1	Sous-espaces stables	158
4.2.2	Polynômes et endomorphismes	161
4.2.3	Polynômes annulateurs et réduction	165
4.2.4	Réductions simultanées	167
4.3	Endomorphismes remarquables	168
4.3.1	Endomorphismes nilpotents	168
4.3.2	Endomorphismes cycliques	174
4.3.3	Endomorphismes diagonalisables	176
4.4	D'autres outils d'algèbre linéaire	181
4.4.1	Déterminant	181
4.4.2	Opérations élémentaires	186
4.4.3	Une méthode	189
4.5	Codes Correcteurs	189
4.5.1	Notion de code correcteur	190
4.5.2	Distance et séparation des mots	192
4.5.3	Codes cycliques	193
4.6	Exercices corrigés	194
5	ALGÈBRE COMMUTATIVE	231
5.1	Quotient	231
5.1.1	Surjection canonique	231
5.1.2	Passage au quotient	232
5.1.3	Quotients et structures algébriques	233
5.2	Anneaux	236
5.2.1	Morphismes d'anneaux	236
5.2.2	Anneaux euclidiens	238
5.2.3	Divisibilité	239
5.3	Théorème chinois	241
5.3.1	Autour du théorème chinois	241
5.3.2	Factorisation de polynômes	244
5.4	Exercices corrigés	249

6 MODULES		253
6.1	Structure de module	254
6.1.1	Modules sur un anneau	254
6.1.2	Morphismes de A -modules	256
6.1.3	Sous-modules	257
6.1.4	Module quotient	259
6.2	Changement d'anneau de base	263
6.2.1	Restriction des scalaires	263
6.2.2	Lien entre A -modules et A/I -modules	264
6.2.3	$A[X]$ -modules et A -modules	266
6.2.4	Lorsque A est un corps	269
6.3	Familles génératrices, familles libres	270
6.3.1	Définitions	270
6.3.2	Modules de type fini	272
6.3.3	Modules libres	274
6.4	Modules de type fini sur un anneau principal	275
6.4.1	Approche théorique	276
6.4.2	Approche matricielle	285
6.4.3	Lien entre les deux approches	289
6.5	Réduction des endomorphismes	292
6.5.1	Invariants de similitude	293
6.5.2	Réduction de Jordan	304
6.6	Exercices corrigés	307
Bibliographie		329
Index		331