

# Table des matières

<b>Les auteurs</b>	<b>v</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>xix</b>
<b>Remerciements</b>	<b>xx</b>
<b>Partie I Topologie</b>	<b>1</b>
<b>1 Espaces topologiques</b>	<b>5</b>
I Topologies, notions ensemblistes associées . . . . .	5
I.1 Définitions et exemples . . . . .	5
I.2 Bases de topologie . . . . .	8
I.3 Un exemple fondamental : la topologie naturelle d'un espace métrique . . . . .	10
I.4 Intérieur, adhérence, frontière d'une partie . . . . .	11
I.5 Voisinages . . . . .	14
I.6 Parties denses . . . . .	16
I.7 Espaces séparés . . . . .	17
II Continuité et limite . . . . .	17
II.1 Continuité globale et locale . . . . .	17
II.2 Opérations sur la continuité . . . . .	20
II.3 Continuité et densité, prolongements des égalités et inégalités . . . . .	22
II.4 Homéomorphismes . . . . .	22
II.5 Limite d'une application en un point . . . . .	23
III Construction d'espaces topologiques . . . . .	24
III.1 Espaces produits . . . . .	25
III.2 Espaces quotients . . . . .	27
IV Exercices . . . . .	29
<b>2 Espaces topologiques compacts</b>	<b>31</b>
I Espaces topologiques compacts . . . . .	31
I.1 Définitions et premières propriétés . . . . .	31
I.2 Les compacts de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	33
II Compacité et continuité . . . . .	34
II.1 Propriétés des applications continues définies sur un compact . . . . .	34
II.2 Applications : théorèmes classiques d'existence d'extrema . . . . .	35
III Espaces localement compacts . . . . .	36
III.1 Compacité locale . . . . .	36
III.2 Compactification d'Alexandroff . . . . .	37
IV Exercices . . . . .	39
<b>3 Espaces topologiques connexes</b>	<b>41</b>
I Espaces connexes . . . . .	41
I.1 Définitions, premières propriétés et exemples . . . . .	41
I.2 Composantes connexes . . . . .	44
II Connexité et continuité . . . . .	45
III Connexité par arcs . . . . .	46
IV Applications pratiques de la connexité . . . . .	47
IV.1 Résultats d'existence . . . . .	48

IV.2	Résultats d'unicité . . . . .	48
V	Connexité locale . . . . .	49
VI	Exercices . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Dénombrabilité et suites dans les espaces topologiques</b>	<b>51</b>
I	Rappels de notions ensemblistes . . . . .	51
I.1	Dénombrabilité . . . . .	51
I.2	Suites . . . . .	53
II	Suites à valeurs dans un espace topologique . . . . .	53
II.1	Limites de suites . . . . .	53
II.2	Suites et espace topologique compact . . . . .	56
II.3	Convergence simple d'une suite d'applications . . . . .	56
III	Dénombrabilité et espace topologique . . . . .	57
III.1	Espace topologique à base dénombrable . . . . .	58
III.2	Espace topologique à base dénombrable de voisinages . . . . .	59
III.3	Espace séparable . . . . .	60
IV	Suites à valeurs dans un espace topologique à base dénombrable de voisinages . . . . .	61
V	Exercices . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Espaces métriques</b>	<b>65</b>
I	Distances et espaces métriques . . . . .	65
I.1	Rappels et exemples . . . . .	65
I.2	Isométries et transport de distances . . . . .	66
I.3	Espaces vectoriels normés . . . . .	66
II	Topologie d'un espace métrique . . . . .	67
II.1	Topologie naturelle sur un espace métrique . . . . .	67
II.2	Diamètre d'une partie, distance entre deux parties . . . . .	68
III	Espaces semi-métriques, espaces vectoriels semi-normés . . . . .	69
IV	Espaces métrisables . . . . .	71
IV.1	Espaces métrisables . . . . .	71
IV.2	Propriétés de séparation des espaces métrisables . . . . .	73
IV.3	Propriétés de dénombrabilité des espaces métrisables . . . . .	74
V	Continuité uniforme dans les espaces métriques . . . . .	75
VI	Limites dans les espaces métriques . . . . .	77
VI.1	Limites d'applications, limites de suites . . . . .	77
VI.2	Convergence uniforme d'une suite d'applications . . . . .	77
VII	Compacité dans les espaces métriques . . . . .	78
VII.1	Suites et espaces métriques compacts . . . . .	78
VII.2	Espaces métriques précompacts . . . . .	80
VII.3	Continuité et espaces métriques compacts . . . . .	81
VIII	Exercices . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Espaces complets</b>	<b>83</b>
I	Espaces métriques complets . . . . .	83
I.1	Oscillation d'une fonction . . . . .	83
I.2	Suites de Cauchy . . . . .	84
I.3	Espaces complets . . . . .	86
I.4	Premières propriétés des espaces complets . . . . .	88
I.5	Exemples . . . . .	90
I.6	Espaces semi-métriques complets . . . . .	91
II	Précompacité, complétude et compacité . . . . .	91
III	Applications aux problèmes de convergence . . . . .	93

III.1	Interversion des limites . . . . .	93
III.2	Applications uniformément continues . . . . .	95
IV	Approximations successives et point fixe . . . . .	96
IV.1	Dynamique liée à une application . . . . .	96
IV.2	Le théorème du point fixe . . . . .	97
V	La propriété de Baire . . . . .	99
V.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	99
V.2	Le théorème de Baire . . . . .	101
V.3	Espace maigre, espace résiduel, exemples . . . . .	101
VI	Le complété d'un espace métrique . . . . .	104
VI.1	Définitions et propriétés . . . . .	104
VI.2	Existence du complété . . . . .	105
VII	Exercices . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Espaces vectoriels normés</b> . . . . .	<b>107</b>
I	Espaces vectoriels normés . . . . .	107
I.1	Rappels et définitions . . . . .	107
I.2	Exemples . . . . .	109
I.3	Sous-espaces, produits et quotients . . . . .	113
I.4	Parties denses et parties totales . . . . .	114
II	Applications linéaires continues . . . . .	115
II.1	Espaces d'applications linéaires continues . . . . .	115
II.2	Formes linéaires continues et dual topologique . . . . .	119
III	Espaces d'applications multilinéaires continues . . . . .	120
IV	Espaces normés de dimension finie . . . . .	121
IV.1	Propriétés générales . . . . .	121
IV.2	Le théorème de Riesz . . . . .	123
V	Exercices . . . . .	124
<b>8</b>	<b>Exemples d'espaces topologiques</b> . . . . .	<b>125</b>
I	Propriétés topologiques des groupes classiques . . . . .	125
I.1	Fonctions polynômes . . . . .	125
I.2	Polynômes et matrices . . . . .	126
II	Propriétés topologiques des groupes classiques . . . . .	127
III	Groupes topologiques . . . . .	127
III.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	127
III.2	Sous-groupes d'un groupe topologique . . . . .	129
IV	Groupes opérant sur des espaces topologiques . . . . .	129
IV.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	129
IV.2	Connexité et groupes classiques . . . . .	131
V	Les tores . . . . .	133
VI	L'espace projectif réel . . . . .	134
VII	La structure des ouverts de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	135
<b>9</b>	<b>Espaces de fonctions continues</b> . . . . .	<b>137</b>
I	Espaces de fonctions continues . . . . .	137
I.1	Espaces de fonctions continues . . . . .	137
I.2	Le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn . . . . .	138
II	Le théorème de Stone-Weierstrass . . . . .	141
III	Le théorème d'Ascoli . . . . .	145
III.1	La notion d'équicontinuité . . . . .	145
III.2	Le théorème d'Ascoli . . . . .	146

IV	Exercices . . . . .	148
----	---------------------	-----

## Partie II Intégration et théorie de la mesure 151

### 10 L'intégrale de Riemann 153

I	Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier . . . . .	153
I.1	Fonctions en escalier . . . . .	154
I.2	Intégrale d'une fonction en escalier . . . . .	154
II	Intégrale de Riemann d'une fonction réglée . . . . .	156
II.1	Fonctions réglées . . . . .	157
II.2	Intégrale d'une fonction réglée . . . . .	158
III	L'intégrale de Riemann . . . . .	159
III.1	Fonctions Riemann-intégrables . . . . .	160
III.2	Intégrale d'une fonction Riemann-intégrable . . . . .	162
IV	Sommes de Riemann . . . . .	163
V	Intégrales de Riemann généralisées . . . . .	168
V.1	Intégrale d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow E$ . . . . .	168
V.2	Quelques difficultés de la théorie de Riemann . . . . .	169
VI	Exercices . . . . .	170
Complément 1	L'intégrale de Henstock-Kurzweil . . . . .	172

### 11 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ 179

I	Mesure extérieure sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	179
I.1	Pavés et cubes . . . . .	180
I.2	Mesure extérieure sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	181
I.3	Propriétés de la mesure extérieure . . . . .	183
II	Ensembles mesurables et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	185
II.1	Ensembles mesurables . . . . .	185
II.2	Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	187
III	Sous-ensembles remarquables de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	193
III.1	Ensembles de mesure nulle . . . . .	193
III.2	Quelques sous-ensembles remarquables . . . . .	196
III.3	Le théorème de Lebesgue . . . . .	200
IV	Exercices . . . . .	204

### 12 Théorie géométrique de la mesure 205

I	Espaces mesurables . . . . .	205
I.1	Tribus sur un ensemble . . . . .	205
I.2	Algèbres et classes monotones . . . . .	207
I.3	Applications mesurables . . . . .	208
I.4	Tribus produit . . . . .	210
I.5	Fonctions numériques mesurables . . . . .	212
II	Espaces mesurés . . . . .	217
II.1	Mesures . . . . .	217
II.2	Ensembles négligeables. Espaces mesurés complets . . . . .	219
III	Construction de mesures . . . . .	221
III.1	Mesures extérieures . . . . .	222
III.2	Prémesures. Théorème de prolongement . . . . .	225
III.3	Mesures boréliennes . . . . .	226
III.4	Un théorème général d'unicité . . . . .	230
IV	Exercices . . . . .	232

<b>13 L'intégrale de Lebesgue</b>	<b>233</b>
I L'intégrale sur un espace mesuré . . . . .	233
I.1 Fonctions étagées mesurables . . . . .	234
I.2 Fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$ . . . . .	237
I.3 Fonctions Lebesgue-intégrables . . . . .	243
II Intégration des fonctions définies sur un espace produit . . . . .	253
II.1 Mesure produit et sommation par tranches . . . . .	253
II.2 Le théorème de Fubini . . . . .	257
III Exercices . . . . .	261
<b>14 Calcul intégral</b>	<b>263</b>
I L'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	263
I.1 L'espace de Lebesgue $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ . . . . .	263
I.2 Résultats de comparaison des intégrales de Lebesgue et de Riemann . . . . .	265
I.3 Intégrale d'une fonction Lebesgue-intégrable admettant une primitive . . . . .	267
I.4 Intégrales des fonctions de plusieurs variables réelles . . . . .	268
I.5 Une formule de changement de variables . . . . .	269
II Interversión de limites et d'intégrales . . . . .	275
II.1 Régularité sous le signe $\int$ . . . . .	275
II.2 Interversión de $\sum$ et $\int$ . . . . .	279
III Exercices . . . . .	283
<b>15 Les espaces <math>\mathcal{L}^p</math> et <math>L^p</math></b>	<b>285</b>
I Espaces $\mathcal{L}^p$ et $L^p$ pour $1 \leq p < \infty$ . . . . .	285
I.1 Les espaces semi-normés $\mathcal{L}^p$ . . . . .	285
I.2 Inégalités de convexité . . . . .	287
I.3 Les espaces normés $L^p$ . . . . .	289
II Complétude des espaces $L^p$ . . . . .	290
III Les espaces $\mathcal{L}^\infty$ et $L^\infty$ . . . . .	292
IV Parties denses dans les espaces $L^p$ . . . . .	294
V Un premier résultat de dualité . . . . .	296
VI Le produit de convolution . . . . .	298
VI.1 Cas des fonctions positives . . . . .	298
VI.2 Cas des fonctions de $L^p$ . . . . .	300
VI.3 Dérivabilité . . . . .	301
VI.4 Approximation de l'unité . . . . .	301
VII Exercices . . . . .	303
<b>Partie III Applications linéaires en dimension infinie</b>	<b>305</b>
<b>16 Le théorème de Hahn-Banach</b>	<b>307</b>
I Le théorème de Hahn-Banach . . . . .	307
II Prolongement des formes linéaires définies sur un espace semi-normé . . . . .	308
III Quelques conséquences géométriques du théorème de Hahn-Banach dans les espaces vectoriels normés . . . . .	310
IV Le dual topologique d'un sous-espace fermé et d'un espace quotient . . . . .	311
V Exercices . . . . .	312

<b>17 Théorème de Baire et applications linéaires</b>	<b>313</b>
I Le théorème de Banach-Steinhaus . . . . .	313
II Le théorème de l'application ouverte . . . . .	315
III Le théorème du graphe fermé . . . . .	317
IV Exercices . . . . .	319
<b>18 Espaces de Hilbert</b>	<b>321</b>
I Produits scalaires et espaces de Hilbert . . . . .	322
II Projection orthogonale . . . . .	326
III Le théorème de représentation de Riesz-Fréchet . . . . .	330
IV Bases hilbertiennes . . . . .	331
V Isomorphismes d'espaces de Hilbert . . . . .	336
VI Sommes hilbertiennes . . . . .	338
VII Produit tensoriel de deux espaces de Hilbert . . . . .	341
VIII Exercices . . . . .	343
<b>19 Opérateurs bornés</b>	<b>345</b>
I L'espace des opérateurs bornés . . . . .	345
II Adjoint d'un opérateur borné . . . . .	347
III Opérateurs positifs . . . . .	350
IV Opérateurs compacts . . . . .	355
IV.1 Généralités . . . . .	355
IV.2 L'alternative de Fredholm . . . . .	358
V Exercices . . . . .	361
<b>20 Spectre des opérateurs bornés</b>	<b>363</b>
I Spectre, résolvante et rayon spectral . . . . .	363
II Spectre des opérateurs compacts . . . . .	368
II.1 Spectre des opérateurs compacts . . . . .	368
II.2 Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints . . . . .	370
II.3 Calcul fonctionnel des opérateurs compacts auto-adjoints . . . . .	373
II.4 Réduction des opérateurs compacts auto-adjoints . . . . .	374
III Le théorème spectral pour les opérateurs bornés . . . . .	375
IV Exemples de calculs de spectres . . . . .	379
IV.1 Le spectre des opérateurs auto-adjoints positifs . . . . .	379
IV.2 Le laplacien discret en dimension un . . . . .	380
IV.3 Un exemple d'opérateur non borné . . . . .	381
V Exercices . . . . .	382
<b>Partie IV Fonctions d'une variable complexe</b>	<b>385</b>
<b>21 Les fonctions analytiques</b>	<b>391</b>
I Rappels et compléments sur les séries entières . . . . .	391
I.1 Polynômes et séries formelles . . . . .	391
I.2 Rappels sur les séries entières . . . . .	393
I.3 Opérations sur les séries formelles . . . . .	396
II Les fonctions analytiques . . . . .	400
II.1 Définitions et premiers exemples . . . . .	401
II.2 Propriétés élémentaires des fonctions analytiques . . . . .	402
III Exemples fondamentaux : exponentielle et logarithme . . . . .	404
III.1 La fonction exponentielle complexe . . . . .	404

III.2	Argument et logarithme complexe . . . . .	407
IV	Exercices . . . . .	412
<b>22</b>	<b>Fonctions holomorphes et théorie de Cauchy</b>	<b>415</b>
I	La notion d'holomorphic . . . . .	415
I.1	Fonctions holomorphes . . . . .	416
I.2	Conditions de Cauchy-Riemann . . . . .	417
II	Intégration le long des chemins de $\mathbb{C}$ . . . . .	419
II.1	Chemins de $\mathbb{C}$ . . . . .	419
II.2	Intégration complexe le long de chemins . . . . .	421
II.3	De l'intégrale sur les chemins à l'existence de primitives . . . . .	424
III	Les théorèmes de Cauchy . . . . .	426
III.1	Le théorème de Cauchy pour le bord d'un triangle . . . . .	427
III.2	Existence de primitives sur les ouverts convexes . . . . .	429
IV	Indice et théorème de Cauchy . . . . .	430
IV.1	Indice d'un chemin fermé . . . . .	430
IV.2	Formule de Cauchy . . . . .	432
IV.3	Analyticité des fonctions holomorphes . . . . .	432
V	Exercices . . . . .	434
<b>23</b>	<b>Les propriétés fondamentales des fonctions holomorphes</b>	<b>437</b>
I	Le théorème d'identité . . . . .	437
II	Les inégalités de Cauchy et leurs applications . . . . .	440
II.1	Propriété de la moyenne et principe du maximum . . . . .	442
II.2	Comportement local . . . . .	444
III	Exercices . . . . .	447
<b>24</b>	<b>Théorie de Cauchy homotopique</b>	<b>449</b>
I	Intégration sur chemins continus . . . . .	449
I.1	Intégrales . . . . .	449
I.2	Homotopie de chemins . . . . .	451
II	Théorie de Cauchy homotopique . . . . .	453
II.1	Indice et détermination continue de l'argument . . . . .	453
II.2	Théorème de Cauchy homotopique . . . . .	455
III	Simple connexité . . . . .	457
IV	Exercices . . . . .	459
<b>25</b>	<b>Singularités des fonctions holomorphes - Théorème des résidus</b>	<b>461</b>
I	Classification des singularités isolées . . . . .	461
I.1	Singularités de fonctions holomorphes . . . . .	461
I.2	Séries de Laurent . . . . .	464
I.3	Développement de Laurent d'une fonction holomorphe . . . . .	467
II	Primitives et résidus . . . . .	468
II.1	Résidu d'une fonction . . . . .	468
II.2	Indice et nombre de zéros et de pôles . . . . .	470
II.3	Calculs d'intégrales . . . . .	474
III	Fonctions méromorphes . . . . .	478
IV	Quelques mots sur la sphère de Riemann . . . . .	480
IV.1	Fonctions méromorphes sur $\hat{\mathbb{C}}$ . . . . .	481
IV.2	Résidu à l'infini . . . . .	483
V	Exercices . . . . .	485

<b>26</b>	<b>Espaces de fonctions holomorphes et méromorphes</b>	<b>489</b>
I	Problèmes de convergence . . . . .	489
I.1	Suites de fonctions holomorphes . . . . .	489
I.2	Topologie de la convergence compacte . . . . .	492
I.3	Compacité . . . . .	496
II	Séries de fonctions holomorphes et méromorphes . . . . .	498
II.1	Séries de fonctions holomorphes . . . . .	498
II.2	Séries de fonctions méromorphes . . . . .	499
III	Produits infinis de fonctions . . . . .	501
III.1	Produits infinis de nombres complexes . . . . .	501
III.2	Produits infinis de fonctions . . . . .	503
IV	Interpolation de fonctions holomorphes et méromorphes . . . . .	505
IV.1	Le théorème d'interpolation de Mittag-Leffler . . . . .	506
IV.2	Le théorème d'interpolation de Weierstrass . . . . .	508
IV.3	Conséquences algébriques . . . . .	511
V	Exercices . . . . .	514
 <b>Partie V Analyse de Fourier</b>		 <b>517</b>
<b>27</b>	<b>Analyse fonctionnelle sur le tore</b>	<b>529</b>
I	Espaces de fonctions périodiques . . . . .	529
I.1	Deux réductions utiles . . . . .	529
I.2	La droite réelle $\mathbb{R}$ , le tore $\mathbb{T}$ et le groupe unitaire $U$ . . . . .	530
I.3	Fonctions périodiques et opérateurs de translation . . . . .	532
I.4	Fonctions périodiques continues . . . . .	533
I.5	Les espaces $\mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ , $1 \leq k < +\infty$ . . . . .	535
I.6	Fonctions périodiques boréliennes . . . . .	537
I.7	Mesure de Haar sur le tore . . . . .	538
I.8	Les espaces $L^p(\mathbb{T})$ , pour $1 \leq p \leq +\infty$ . . . . .	542
I.9	Espaces de Banach homogènes sur le tore . . . . .	547
II	Produits de convolution . . . . .	548
II.1	Construction du produit de convolution . . . . .	550
II.2	Propriétés analytiques . . . . .	558
II.3	Propriétés algébriques . . . . .	559
III	Premières applications . . . . .	560
III.1	Coefficients de Fourier . . . . .	560
III.2	Fonctions de corrélation . . . . .	562
III.3	Approximations de l'unité . . . . .	565
III.4	Fonctions harmoniques . . . . .	575
IV	Exercices . . . . .	585
Complément 1	Groupes et convolution . . . . .	587
Complément 2	Interpolation entre espaces $L^p$ . . . . .	590
<b>28</b>	<b>Analyse et synthèse spectrales sur le tore</b>	<b>595</b>
I	Analyse spectrale . . . . .	597
I.1	Continuité . . . . .	597
I.2	Coefficients de Fourier et symétries . . . . .	598
I.3	Coefficients de Fourier et dérivation . . . . .	601
I.4	Comportements asymptotiques . . . . .	603
I.5	Séries de Fourier et équations différentielles . . . . .	605
II	Convergence en norme . . . . .	607



II.1	Deux critères simples de convergence . . . . .	607
II.2	Non-convergence dans $L^1(\mathbb{T})$ . . . . .	609
II.3	Convergence dans $L^2(\mathbb{T})$ . . . . .	610
II.4	Convergence dans $L^p(\mathbb{T})$ , pour $1 < p < +\infty$ . . . . .	611
II.5	Non-convergence dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ . . . . .	612
III	Synthèses spectrales . . . . .	613
III.1	L'espace $A(\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ des séries absolument convergentes . . . . .	614
III.2	L'isométrie $L^2(\mathbb{T}) = \ell_2(\mathbb{Z})$ . . . . .	616
III.3	Les espaces $A_p(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ , pour $2 \leq p \leq +\infty$ . . . . .	617
III.4	Convergence dans $\mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ , $0 \leq k < +\infty$ . . . . .	620
III.5	Convergence dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ . . . . .	621
IV	Convergence ponctuelle . . . . .	621
IV.1	Convergence en moyenne de Cesarò . . . . .	622
IV.2	Le théorème de Dirichlet et ses satellites . . . . .	623
IV.3	Non-convergence en un point, convergence presque partout . . . . .	624
V	Une série trigonométrique est-elle une série de Fourier ? . . . . .	625
V.1	Une condition nécessaire . . . . .	625
V.2	Une condition suffisante . . . . .	626
VI	Exercices . . . . .	629
<b>29 Analyse de Fourier sur la droite réelle</b>		<b>633</b>
I	Rappels et compléments sur la droite numérique réelle . . . . .	633
I.1	Quelques espaces fonctionnels utiles . . . . .	633
I.2	Espaces de Banach homogènes et convolution . . . . .	635
I.3	Approximations de l'unité . . . . .	639
I.4	L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . . . . .	640
I.5	Caractères boréliens bornés sur $\mathbb{R}$ . . . . .	641
II	Analyse de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	642
II.1	L'intégrale de Fourier . . . . .	642
II.2	Continuité . . . . .	643
II.3	Premiers exemples . . . . .	644
II.4	Transformation de Fourier et symétries . . . . .	649
III	La classe des fonctions à décroissance rapide . . . . .	651
III.1	Propriétés topologiques . . . . .	651
III.2	Des séries aux intégrales de Fourier . . . . .	656
III.3	Analyse de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . . . . .	657
IV	La synthèse spectrale dans $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	659
IV.1	Deux résultats de dualité . . . . .	659
IV.2	Injectivité de la transformation de Fourier . . . . .	660
IV.3	Inversion dans l'algèbre $A(\mathbb{R})$ de Wiener . . . . .	661
IV.4	Convergence ponctuelle . . . . .	663
V	Analyse de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	664
V.1	Le théorème de Plancherel . . . . .	664
V.2	Exemples . . . . .	667
VI	Exercices . . . . .	668
<b>Partie VI Calcul différentiel</b>		<b>671</b>
<b>30 La différentielle</b>		<b>677</b>
I	Définitions et premières propriétés . . . . .	677
I.1	Définition . . . . .	677

I.2	Premières propriétés . . . . .	679
I.3	Application différentielle . . . . .	679
II	Quelques exemples et théorèmes classiques . . . . .	679
II.1	Exemples . . . . .	680
II.2	Opérations sur les fonctions différentiables . . . . .	681
III	Différentielles et dérivées partielles . . . . .	683
IV	Matrice jacobienne . . . . .	684
V	Exercices . . . . .	684
<b>31</b>	<b>Le théorème des accroissements finis</b>	<b>687</b>
I	Théorème des accroissements finis . . . . .	687
I.1	Théorème des accroissements finis, cas réel . . . . .	687
I.2	Théorème des accroissements finis, cas général . . . . .	687
I.3	Une forme forte du théorème des accroissements finis . . . . .	689
II	Applications du théorème des accroissements finis . . . . .	689
II.1	Fonctions à dérivées nulles . . . . .	689
II.2	Différentielles partielles et différentiabilité . . . . .	690
II.3	Gâteaux-différentiabilité . . . . .	691
II.4	Un théorème de convergence . . . . .	691
III	Exercices . . . . .	692
<b>32</b>	<b>Les différentielles d'ordre supérieur</b>	<b>695</b>
I	Dérivées successives et différentielles successives . . . . .	695
II	Premiers exemples et résultats classiques . . . . .	696
III	Théorème de Schwarz . . . . .	698
III.1	Différentielle seconde . . . . .	698
III.2	Cas particulier : $E = E_1 \times \dots \times E_k$ . . . . .	699
IV	Matrice hessienne . . . . .	701
V	Formules de Taylor . . . . .	702
V.1	Préliminaires . . . . .	702
V.2	Énoncé des formules . . . . .	703
V.3	Unicité de la formule de Taylor . . . . .	704
VI	Exercices . . . . .	704
<b>33</b>	<b>Théorèmes d'inversion locale, des fonctions implicites et du rang</b>	<b>707</b>
I	Difféomorphisme . . . . .	707
II	Théorème d'inversion locale . . . . .	709
II.1	Énoncé et exemples . . . . .	709
II.2	Preuve du théorème d'inversion locale . . . . .	710
II.3	Applications du théorème d'inversion locale . . . . .	714
III	Théorème des fonctions implicites . . . . .	715
IV	Théorème du rang constant . . . . .	719
IV.1	Rang, submersion, immersion, plongement . . . . .	719
IV.2	Théorème du rang constant . . . . .	725
V	Exercices . . . . .	727
<b>34</b>	<b>Problèmes d'extrema</b>	<b>729</b>
I	Extrema libres . . . . .	729
I.1	Définitions générales sur les extrema . . . . .	729
I.2	Préliminaires sur les formes bilinéaires continues . . . . .	730
I.3	Conditions nécessaires à l'existence d'un extremum . . . . .	731
I.4	Condition suffisante à l'existence d'un extremum . . . . .	734

II	Extrema liés . . . . .	734
II.1	Énoncé du théorème des multiplicateurs de Lagrange et exemples . . . . .	735
II.2	Preuve du théorème des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	737
III	Exercices . . . . .	739
<b>35</b>	<b>La notion de sous-variété</b> . . . . .	<b>741</b>
I	Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	741
I.1	Une première définition des sous-variétés . . . . .	741
I.2	Niveaux de fonctions et sous-variétés . . . . .	744
I.3	Images de fonctions et sous-variétés . . . . .	747
II	L'espace tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	748
III	Exercices . . . . .	752
	<b>Partie VII Équations différentielles</b> . . . . .	<b>755</b>
<b>36</b>	<b>Les solutions d'une équation différentielle</b> . . . . .	<b>761</b>
I	Équations différentielles et solutions . . . . .	761
I.1	Équations différentielles et solutions . . . . .	761
I.2	Équations autonomes et non autonomes . . . . .	762
I.3	Solutions maximales, points d'existence, points d'unicité . . . . .	766
I.4	Ensembles $\alpha$ et $\omega$ limites, bouts d'une solution . . . . .	768
I.5	Vers des équations plus générales . . . . .	769
II	Les théorèmes d'existence et d'unicité . . . . .	770
II.1	Les théorèmes . . . . .	770
II.2	Premières applications . . . . .	776
III	Exercices . . . . .	778
<b>37</b>	<b>Exemples explicites et études qualitatives</b> . . . . .	<b>779</b>
I	Équations linéaires autonomes et exponentielle . . . . .	779
II	Les équations à variables séparées . . . . .	781
III	Intégrabilité . . . . .	782
III.1	Intégrales premières et conséquences . . . . .	783
III.2	Le système de Lotka-Volterra . . . . .	786
IV	Quelques inéquations différentielles et intégrales . . . . .	787
IV.1	Inéquations intégrales . . . . .	787
IV.2	Application : comparaison des solutions d'une équation différentielle . . . . .	789
V	Équations non autonomes sur la droite . . . . .	790
VI	Introduction à l'étude qualitative des champs plans . . . . .	792
VI.1	Esquisse d'une méthode d'étude . . . . .	792
VI.2	Le système de Van der Pol . . . . .	796
VII	Exercices . . . . .	798
<b>38</b>	<b>Le flot d'un champ de vecteurs</b> . . . . .	<b>799</b>
I	Le flot : définitions et exemples . . . . .	799
I.1	Première approche de la notion de flot : le cas autonome . . . . .	799
I.2	Le cas non autonome . . . . .	801
I.3	Les changements de variables et le flot . . . . .	803
II	Le flot des équations linéaires . . . . .	805
II.1	Retour sur la résolution d'une équation linéaire . . . . .	805
II.2	Flot et résolvante . . . . .	806
II.3	Dépendance du flot relative aux paramètres . . . . .	808

II.4	Retour sur l'exponentielle . . . . .	809
III	Propriétés de régularité . . . . .	810
III.1	Topologie du domaine et continuité du flot . . . . .	810
III.2	La régularité du flot . . . . .	811
IV	Exercices . . . . .	814
<b>39</b>	<b>Étude locale d'un champ de vecteurs</b>	<b>815</b>
I	Le théorème de redressement du flot . . . . .	815
II	Quelques questions de stabilité . . . . .	816
III	Le théorème de conjugaison de Grobman-Hartman . . . . .	820
III.1	Endomorphismes hyperboliques . . . . .	820
III.2	Un théorème de point fixe hyperbolique . . . . .	821
III.3	Le théorème de conjugaison pour les difféomorphismes . . . . .	823
III.4	Le théorème de conjugaison pour les champs . . . . .	825
IV	Le théorème de la variété invariante . . . . .	827
V	Le système de Van der Pol . . . . .	831
VI	Exercices . . . . .	833
	<b>Partie VIII Solutions des tests</b>	<b>835</b>
	<b>Partie IX Solutions des exercices</b>	<b>859</b>
	<b>Index</b>	<b>927</b>