Sommaire

Notations 22
Introduction 24

I Introduction heuristique

1 Probabilités (heuristique) 31
2 Variable aléatoire (heuristique) 55

II Théorie et Pratique

3 Espaces probabilisé 77
4 Conditionnement 101
5 Indépendance (1/2) 111
6 Variables aléatoires discrètes 127
7 Espérance de v.a. discrètes 143
8 Couples de v.a. discrètes 173
9 Le jeu de *pile* ou *face* 203
10 Variables aléatoires à densité 223
11 Espérance d'une v.a. à densité 245
12 Couples de v.a. à densité 257

III Plus formellement...

13 Variables aléatoires (cas général) 291
14 L'espérance comme intégration... 307
15 Vecteurs aléatoires 331
16 Indépendance (2/2) 341
17 Fonctions caractéristiques 357
18 Vecteurs gaussiens (∗) 365

IV Théorèmes limites

19 Convergences 383
20 Loi des grands nombres 417
21 Le théorème limite central 437
22 Techniques d'approximations 447
23 Espérance conditionnelle 469

V Quelques applications

24 Résultats élégamment établis... 495
25 Simuler informatiquement une loi 509
26 Méthodes de Monte-Carlo 531
27 Arithmétique et probabilités 549
28 Bosons, fermions et boltzmannions 559
29 Processus de Poisson 573
30 Mouvements browniens 581
31 Estimation bayésienne 613
32 Loi de l'Arc sinus et séries aléatoires 617
33 À propos de quelques paradoxes 625

A Annexes

A Éléments d'analyse et d'algèbre 637
B Davantage sur la mesure 665
C Théorèmes d'existence 679
D Tables 685
E Lexique français-anglais 689

Table des matières

Introduction **24**

§ 1. Les lois du hasard . . . 24

§ 2. But de la théorie . . . 25

§ 3. Quelques mots sur l'ouvrage . . . 26

§ 4. Rosencrantz et Guildenstern . . . 27

Exercices . . . 28

Partie I : Introduction heuristique **29**

1 Probabilités (heuristique) **31**

1.1 Le langage de l'aléatoire . . . 31

§ 5. Phénomènes aléatoires . . . 31

§ 6. L'univers Ω et les réalisations possibles du hasard . . . 33

§ 7. Événements . . . 35

§ 8. Compter/mesurer . . . 35

§ 9. Langage ensembliste . . . 37

§ 10. Calcul des probabilités . . . 38

1.2 Probabilités sur un ensemble fini ou dénombrable . . . 39

§ 11. Univers fini . . . 39

§ 12. Probabilités sur un ensemble dénombrable . . . 42

1.3 Probabilités sur $\{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}^{\mathbb{N}^*}$ . . . 42

§ 13. Un univers non dénombrable . . . 42

§ 14. Unions dénombrables d'événements . . . 44

§ 15. Unions non dénombrables d'événements . . . 45

§ 16. Probabilité sur $\{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}^{\mathbb{N}}$ . . . 45

1.4 Probabilités conditionnelles . . . 45

§ 17. Un exemple simple . . . 45

§ 18. Second exemple . . . 46

§ 19. Formule des probabilités totales . . . 47

§ 20. Formule des probabilités composées . . . 48

§ 21. Indépendance stochastique . . . 48

§ 22. « Indépendance = produit » (*) . . . 49

Exercices . . . 50

2 Variables aléatoires (heuristique) 55
2.1 Variables réelles . . . 56
§ 23. Première définition . . . 56
§ 24. Probabilité image (ou loi) . . . 57
§ 25. Fonctions de répartition . . . 58
§ 26. Extension de la notion de variables aléatoires . . . 60
§ 27. Variables discrètes . . . 61
§ 28. Variables à densité . . . 62
§ 29. Est-ce tout ? . . . 64
§ 30. La connaissance de Ω est inutile . . . 65
2.2 La notion d'espérance . . . 65
§ 31. Points de vue du théoricien, point de vue de l'expérimentateur . . . 65
§ 32. Le problème de la sommation . . . 67
2.3 Espérance d'une variable discrète ou à densité . . . 68
§ 33. Cas discret : première (tentative de) définition . . . 68
§ 34. Deux expériences numériques . . . 68
§ 35. Séries commutativement convergentes . . . 70
§ 36. Seconde définition . . . 71
§ 37. Espérance d'une variable à densité . . . 72
Exercices . . . 72

Partie II : Théorie et Pratique 75

3 Espaces probabilisés 77
3.1 Parties, algèbres, tribus . . . 78
§ 38. Unions disjointes . . . 78
§ 39. Algèbres . . . 78
§ 40. Tribus . . . 79
§ 41. Borne supérieure et borne inférieure . . . 79
§ 42. Autres propriétés des tribus . . . 80
§ 43. Construire une tribu. Tribu engendrée par un ensemble de parties . . . 81
3.2 Espaces probabilisés . . . 82
§ 44. Espaces probabilisables . . . 82
§ 45. Espaces probabilisés . . . 84
§ 46. Propriétés des mesures de probabilités . . . 85
§ 47. Événements négligeables . . . 87
§ 48. Espaces probabilisés complets ($*$) . . . 87
§ 49. Systèmes complets, quasi-complets d'événements . . . 88
§ 50. Formule du crible (ou : de Poincaré) . . . 89
3.3 Probabilité sur $\mathbb{R}$ . . . 90
§ 51. Fonction de répartition d'une probabilité . . . 90
§ 52. La mesure de Lebesgue sur $[\,0\,;\,1\,]$ . . . 92
§ 53. Probabilités finies . . . 92
§ 54. Probabilités discrètes . . . 93
§ 55. Probabilités à densité . . . 93
3.4 Annexe : π-systèmes et théorème de Carathéodory . . . 94
§ 56. π-systèmes . . . 94
§ 57. Le théorème de Carathéodory . . . 94
3.5 Annexe : un ensemble non mesurable . . . 95
Exercices . . . 96

4 Conditionnement **101**
§ 58. Probabilités conditionnelles . . . 101
§ 59. Formule des probabilités composées . . . 103
§ 60. Formule des probabilités totales . . . 103
§ 61. Théorème de Bayes . . . 104
§ 62. Quelques remarques et difficultés . . . 106
Exercices . . . 108

5 Indépendance (1/2) **111**
5.1 Indépendance d'événements et de tribus . . . 111
§ 63. Indépendance de deux événements . . . 111
§ 64. Indépendance mutuelle . . . 112
5.2 Les lemmes de Borel-Cantelli . . . 114
§ 65. Limite supérieure et limite inférieure . . . 114
§ 66. Les lemmes de Borel-Cantelli . . . 117
5.3 Application : du jeu de recouvrement au paradoxe d'Olbers . . . 119
§ 67. Le paradoxe historique d'Olbers . . . 119
§ 68. Un modèle bidimensionnel de recouvrement . . . 120
§ 69. Modèle stellaire uniforme : probabilité que le cercle... . . . 121
Exercices . . . 123

6 Variables aléatoires discrètes **127**
6.1 Variables aléatoires discrètes . . . 127
§ 70. Variable simple, variable discrète . . . 127
§ 71. Système complet induit par une variable aléatoire discrète . . . 128
§ 72. Loi d'une variable aléatoire discrète . . . 129
§ 73. Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète . . . 130
§ 74. Histogrammes . . . 131
§ 75. Variables aléatoires au sens large . . . 132
6.2 Lois classiques . . . 133
§ 76. Loi uniforme . . . 133
§ 77. Loi de Bernoulli . . . 133
§ 78. Loi binomiale . . . 134
§ 79. Loi géométrique . . . 134
§ 80. Loi de Poisson . . . 136
§ 81. Tirages avec et sans remise. Loi hypergéométrique . . . 139
§ 82. Loi de l'image $\varphi(\mathrm{X})$ d'une variable aléatoire . . . 140
Exercices . . . 141

7 Espérance d'une variable aléatoire discrète **143**
7.1 Espérance . . . 143
§ 83. Espérance . . . 143
§ 84. Représentations de X comme combinaisons de fonctions indicatrices . . . 145
§ 85. Espérances infinies . . . 147
§ 86. Linéarité . . . 148
§ 87. Application de la linéarité au calcul pratique d'une espérance . . . 149
§ 88. Autres propriétés de l'espérance . . . 150
7.2 Moments . . . 151
§ 89. Formule de transfert . . . 151
§ 90. Moments . . . 151
§ 91. Moments centrés . . . 152

§ 92. Variance, écart-type 152
§ 93. Propriétés de la variance 155
§ 94. Variable centrée réduite 155
§ 95. Inégalité de Cauchy-Schwarz 156
§ 96. Espérance et variance des lois classiques 157
§ 97. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev 157
§ 98. Atouts et faiblesses de l'inégalite de Bienaymé-Tchebychev 158
7.3 Fonctions génératrices 159
§ 99. Fonction génératrice 159
§ 100. Récupération des moments 160
§ 101. Fonctions génératrices des lois classiques 161
7.4 Un problème classique : le collectionneur 162
§ 102. Position du problème 162
§ 103. Loi du temps d'attente 163
§ 104. Une majoration de la probabilité de déviation 164
Exercices 166

8 Couples de variables aléatoires discrètes **173**
§ 105. Position du problème 173
8.1 Loi d'un couple 174
§ 106. Loi conjointe, lois marginales 174
§ 107. Lois conditionnelles 175
§ 108. Somme de deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ 176
§ 109. Théorème de transfert 176
8.2 Indépendance 177
§ 110. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes 177
§ 111. Indépendance mutuelle 178
§ 112. Fonctions de variables indépendantes 179
§ 113. Un exemple : minimum et maximum de variables indépendantes 180
§ 114. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes 181
§ 115. Somme de variables indépendantes — formule de convolution 182
§ 116. Loi binomiale comme somme de lois de Bernoulli 182
§ 117. Théorèmes de stabilité 183
8.3 Covariance 183
§ 118. Covariance d'un couple discret 183
§ 119. Somme de variables aléatoires 185
§ 120. Coefficient de corrélation 187
§ 121. Invariance par changement d'échelle de $\rho(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ 187
§ 122. Covariance d'un couple de données statistiques 188
8.4 Espérance conditionnelle (cas discret) 189
§ 123. Lois conditionnelles 189
§ 124. Espérance conditionnelle, première approche 190
§ 125. Espérance conditionnelle, seconde approche 191
8.5 Sommation d'un nombre aléatoire de variables 192
§ 126. Contexte historique et mathématique 192
§ 127. Identités de Wald 193
§ 128. Processus de Galton-Watson 195
§ 129. Probabilité d'extinction 196
§ 130. Évolution de la population 198
Exercices 198

9 Le jeu de pile ou face **203**
9.1 Formalisation 203
§ 131. Espace probabilisé associé à une partie infinie de *pile* ou *face* 203
§ 132. Quelques notations 204
9.2 Le motif dans le tapis 205
§ 133. Longueur moyenne de la deuxième séquence homogène 205
§ 134. Vaut-il mieux parier FPP ou PPF ? 206
§ 135. Occurrence de motifs, événements régénératifs 207
§ 136. Temps d'attente d'un des motifs PPF et FPP 209
§ 137. Temps d'attente du motif PPP 210
9.3 Théorèmes limites 211
§ 138. Une certitude : la moyenne 211
§ 139. Retour à l'équilibre et marches aléatoires 213
9.4 Les nombres normaux existent ! 215
§ 140. Une suite de variables de Bernoulli indépendantes est un réel de $[\,0\,;\,1\,[$ (et vice-versa) 215
§ 141. Propriétés des fonctions de Rademacher 216
§ 142. Le théorème des nombres normaux de Borel 218
§ 143. Existence de nombres complètement normaux 218
Exercices 220

10 Variables aléatoires à densité **223**
§ 144. À propos de l'intégrabilité des fonctions 223
10.1 Variables aléatoires à densité 224
§ 145. Variables continues 224
§ 146. Variables absolument continues, ou à densité 224
§ 147. Propriétés de la densité de probabilité 227
§ 148. Changement d'échelle 227
§ 149. Médiane 228
§ 150. Variables symétriques 229
10.2 Lois classiques 229
§ 151. Loi uniforme 229
§ 152. Loi exponentielle 230
§ 153. Loi normale centrée réduite 231
§ 154. Loi normale 232
§ 155. Loi de Cauchy 234
§ 156. Loi Γ (Gamma) 235
§ 157. Loi γ 235
§ 158. Loi du χ^2 235
§ 159. Loi bêta $\mathrm{B}(a, b)$ 235
10.3 Changement de variable aléatoire 237
§ 160. Loi de $\varphi(\mathrm{X})$ lorsque φ est injective 237
§ 161. Loi de $\varphi(\mathrm{X})$: cas général 238
§ 162. Simuler une loi à densité 239
Exercices 241

11 Espérance d'une variable aléatoire à densité **245**
11.1 Espérance et moments 245
§ 163. Espérance 245
§ 164. Formule de transfert 246
§ 165. Moments 247

§ 166. Moments centrés 247
§ 167. Variance 248
§ 168. Inégalité de Cauchy-Schwarz 249
§ 169. Espérance et variance des lois classiques 249
§ 170. Variables centrées réduites 252
§ 171. Autres caractéristiques numériques d'une variable aléatoire à densité . . 252
11.2 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev 253
§ 172. Inégalité de Markov 253
§ 173. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev 253
Exercices 254

12 Couples de variables à densité **257**
12.1 Loi d'un couple 257
§ 174. Loi d'un couple, lois marginales 257
§ 175. Couple admettant une densité 258
§ 176. Densités marginales 261
§ 177. Somme de deux variables aléatoires à densité 261
§ 178. Théorème de transfert 263
12.2 Indépendance 263
§ 179. Indépendance de deux variables aléatoires à densité 263
§ 180. Indépendance mutuelle 264
§ 181. Somme de deux variables aléatoires indépendantes 265
§ 182. Somme de lois normales indépendantes 266
§ 183. Un exemple : quotient de deux lois normales 266
§ 184. Maximum et minimum de N variables aléatoires indépendantes 267
§ 185. Espérance du produit de variables indépendantes 268
12.3 Covariance 269
§ 186. Covariance d'un couple à densité 269
§ 187. Coefficient de corrélation 270
12.4 Lois conditionnelles 271
§ 188. Lois conditionnelles 271
§ 189. Exemple de variable conditionnée par une autre 274
§ 190. Un exemple de loi mixte (discret, continu) : temps d'attente du métro . 274
§ 191. Espérances conditionnelles 277
Exercices 278

Partie III : Plus formellement... 289

13 Variables aléatoires : cas général **291**
13.1 Mesurabilité 291
§ 192. Définition d'une variable aléatoire 291
§ 193. Calcul des images réciproques 292
§ 194. Quelques résultats sur la mesurabilité 292
13.2 Fonction de répartition 294
§ 195. Loi d'une variable aléatoire 294
§ 196. Fonction de répartition 294
§ 197. Variables discrètes, continues, mixtes 296
§ 198. Décomposition de Lebesgue d'une fonction de répartition 297
§ 199. Densité au sens des distributions 299
§ 200. Une définition de l'espérance n'utilisant que la fonction de répartition . 300

§ 201. L'espérance et les notations de l'intégrale de Stieltjes 301
13.3 Limite simple de variables aléatoires 302
Exercices 304

14 L'espérance comme intégration sur une mesure de probabilité 307
14.1 Construction de l'espérance comme intégrale 308
§ 202. Espérance d'une variable aléatoire simple 308
§ 203. Espérance d'une variable aléatoire positive 309
§ 204. Espérance comme limite croissante d'une suite de variables simples (∗) . 309
§ 205. Espérance d'une variable aléatoire réelle 310
§ 206. Espérance d'une variable aléatoire complexe 311
§ 207. Propriétés de l'espérance ; espace $\mathcal{L}^1$ 311
§ 208. Intégration sur une partie 313
§ 209. Espaces $\mathcal{L}^1$ et L^1 313
§ 210. Moments d'ordre supérieur 313
14.2 Théorèmes de convergence 314
§ 211. Théorème de convergence monotone 314
§ 212. Lemme de Fatou 315
§ 213. Théorème de convergence dominée 316
§ 214. La Cavalerie Légère à l'œuvre 317
14.3 Le théorème de transfert et ses applications 317
§ 215. Le théorème général 317
§ 216. Cas des variables à densité 319
14.4 Espace L^2 ; interprétations géométriques 321
§ 217. Espaces $\mathcal{L}^2$ et L^2 321
§ 218. Inégalité de Cauchy-Schwarz 321
§ 219. Covariance 322
§ 220. Structure de l'espace L^2 322
§ 221. Interprétations géométriques 324
§ 222. Meilleur estimateur quadratique d'une variable aléatoire 325
14.5 Inégalités 326
§ 223. Inégalité de Markov 326
§ 224. Inégalités de Bienaymé-Tchebychev 326
§ 225. Inégalité de Bernstein 328
§ 226. Inégalité de Jensen (convexité) 328
14.6 Annexe : le théorème de convergence monotone 329
Exercices 329

15 Vecteurs aléatoires 331
§ 227. Notations 331
15.1 Probabilités sur $\mathbb{R}^n$ 332
§ 228. Boréliens de $\mathbb{R}^n$ 332
§ 229. Probabilité produit 332
§ 230. Densités 332
15.2 Vecteurs aléatoires 332
§ 231. Espérance 333
§ 232. Matrice de covariance 333
§ 233. Inégalité de Cauchy-Schwarz 334
15.3 Fubini !!! 335
§ 234. Le théorème de Fubini en pratique 335
§ 235. Application : densités marginales 335

§ 236. Application : expression alternative de l'espérance 336
15.4 Changements de variables aléatoires 337
§ 237. Changement de vecteur aléatoire 337
§ 238. Somme, produit et quotient de deux variables aléatoires 338
Exercices 339

16 Indépendance (2/2) 341
16.1 Indépendance de variables aléatoires 341
§ 239. Indépendance de deux variables aléatoires 341
§ 240. Indépendance de classes et de tribus d'événements 343
§ 241. Indépendance de n variables aléatoires 344
§ 242. Caractérisations de l'indépendance de variables aléatoires 344
§ 243. Coalitions 344
§ 244. Indépendance de variables aléatoires discrètes 345
§ 245. Indépendance de variables aléatoires à densité 345
16.2 Somme et produit de variables aléatoires indépendantes 346
§ 246. Espérance d'un produit 346
§ 247. Formule de convolution 348
§ 248. Formule de convolution pour les variables à densité 349
§ 249. Somme de n variables aléatoires indépendantes 350
16.3 Temps d'arrêt et identité de Wald 350
§ 250. Notion de temps d'arrêt 350
§ 251. Temps d'arrêt et identités de Wald 351
Exercices 354

17 Fonctions caractéristiques 357
§ 252. Variables aléatoires complexes 357
§ 253. Fonction caractéristique 358
§ 254. Cas des variables aléatoires discrètes 359
§ 255. Propriétés de la fonction caractéristique 359
§ 256. Fonction caractéristique d'une somme de variables indépendantes . . . 360
§ 257. Théorème d'unicité 360
§ 258. Fonction caractéristique et indépendance 361
§ 259. Régularité de la fonction caractéristique 361
§ 260. Fonctions caractéristiques usuelles 362
§ 261. Le théorème de continuité de Paul Lévy 362
Exercices 363

18 Vecteurs gaussiens 365
18.1 Lois normales sur $\mathbb{R}^2$ 365
§ 262. Lois normales et extension 365
§ 263. Lois normales sur $\mathbb{R}^2$: cas non dégénéré 366
§ 264. Réduction d'une loi normale non dégénérée sur $\mathbb{R}^2$ 368
18.2 Aspects numériques de lois normales sur $\mathbb{R}^2$ 370
§ 265. Lois marginales 370
§ 266. Combinaisons linéaires de X et Y 370
§ 267. Densités conditionnelles 372
§ 268. Ellipses d'égale densité 372
18.3 Vecteurs gaussiens 374
§ 269. Définition des vecteurs gaussiens 374
§ 270. Caractérisation par les combinaisons linéaires 375

§ 271. Indépendance et décorrélation 375
§ 272. Décomposition d'un vecteur gaussien 376
§ 273. Densité d'un vecteur gaussien 377
§ 274. Ellipsoïdes d'égale densité et loi du χ^2 378
§ 275. Lemme des moments (théorème de Wick) 378
Exercices 379

Partie IV : Théorèmes limites 381

19 Convergence 383
§ 276. Introduction aux théorèmes limites 383
19.1 Convergence presque sûre, convergence en probabilité 385
§ 277. Convergence presque sûre 385
§ 278. Critères de convergence presque sûre (∗) 386
§ 279. Convergence en probabilité 388
§ 280. Une caractérisation par l'espérance 388
§ 281. Convergence et images de variables aléatoires 389
§ 282. Comparaison entre convergence en probabilité et convergence p.s. . . . 389
§ 283. Une distance sur l'espace des variables aléatoires (∗) 391
19.2 Convergence en moyenne et dans L^p 392
§ 284. Convergence en moyenne et dans L^p 392
§ 285. Convergence en probabilité et convergence dans L^p (∗) 392
19.3 Convergence en loi 393
§ 286. Convergence en loi 393
§ 287. Convergence en loi *versus* convergence étroite 394
§ 288. Convergence en loi et convergence en probabilité 396
§ 289. Convergence en loi de variables discrètes 396
§ 290. Convergence en loi de variables à densité 399
§ 291. Convergence en loi et fonctions caractéristiques 401
§ 292. Convergence en loi vers une constante 401
§ 293. Convergence en loi d'un couple, théorème de Slutsky 402
19.4 Une application : produit scalaire de vecteurs unitaires aléatoires . 403
§ 294. Vecteur aléatoire sur la sphère S_n 403
§ 295. Loi du produit scalaire 403
§ 296. Loi limite 404
19.5 Seconde application : suites équidistribuées 405
§ 297. Suites équidistribuées 405
§ 298. Critère de Weyl 405
§ 299. Application aux suites ($n\alpha \mod 1$) 407
19.6 Résumé synoptique 409
19.7 Annexe : convergence étroite 410
§ 300. Théorème de représentation de Skorokhod 410
§ 301. Équivalence de la convergence en loi et de la convergence étroite 410
Exercices 412

20 Loi des grands nombres 417
20.1 La loi du tout ou rien 417
§ 302. Événements de queue, tribu asymptotique 417
§ 303. Loi du 0–1 de Kolmogorov 419
§ 304. Loi du tout ou rien pour les événements 420

§ 305. Loi du tout ou rien de Hewitt-Savage (∗) 420
§ 306. Une application aux séries aléatoires 421
§ 307. Une application aux marches aléatoires 421
20.2 Lois des grands nombres 423
§ 308. La loi faible des grands nombres 424
§ 309. La loi forte des grands nombres 425
§ 310. Cas de la divergence (∗) 427
20.3 Théorème de Glivenko-Cantelli 428
§ 311. Fonction de répartition empirique 428
§ 312. Application : le test de Kolmogorov-Smirnov 430
20.4 Annexe : démonstration de la loi des grands nombres 432
Exercices 434

21 Le théorème limite central 437
§ 313. Au-delà de la loi des grands nombres 437
§ 314. Le théorème limite central 438
§ 315. Autres formes du théorème limite central (∗) 440
§ 316. Forme locale du théorème limite central 441
§ 317. Évaluation de la vitesse de convergence 442
§ 318. Extension aux variables vectorielles (∗) 443
§ 319. Utilité du théorème limite central 443
§ 320. La physique et la loi du $1/\sqrt{n}$ 443
§ 321. Au-delà du théorème limite central : la loi du logarithme itéré 444
Exercices 446

22 Techniques d'approximation 447
22.1 Approximations poissoniennes 447
§ 322. Convergence vers une loi de Poisson 447
§ 323. Approximation poissonienne d'une loi binomiale 448
22.2 Approximation normale 449
§ 324. Approximation normale d'une loi binomiale ; correction de continuité . . 449
§ 325. Approximation normale d'une loi de Poisson 451
§ 326. Approximation normale et de inégalité de Bienaymé-Tchebychev 452
§ 327. Estimer un nombre de lancers nécessaires 453
§ 328. Résumé des conditions d'approximation 456
22.3 Régression linéaire 456
§ 329. Droite de régression 456
§ 330. Droite de régression par rapport à y 457
§ 331. Corrélation et causalité 459
22.4 Estimation 460
§ 332. Un exemple : moyenne empirique 460
§ 333. Un exemple : variance empirique 460
§ 334. Notion d'estimateur 462
§ 335. Risque quadratique 462
§ 336. Intervalles de confiance 463
Exercices 464

23 Espérance conditionnelle 469
23.1 Le cas fini ou dénombrable 469
§ 337. Espérance conditionnelle sachant une partition 470
§ 338. Un autre point de vue 471

§ 339. La propriété fondamentale de l'espérance conditionnelle 472
§ 340. Propriétés élémentaires 472
§ 341. Espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire discrète 474
§ 342. Fonctions mesurables selon une partition dénombrable 475
23.2 Le cas général 476
§ 343. Espérance d'une variable aléatoire sachant un événement 476
§ 344. Espérance conditionnelle sachant une tribu 476
§ 345. Espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire 478
§ 346. Lemme de factorisation 478
§ 347. Propriétés de l'espérance conditionnelle 478
§ 348. Théorèmes de convergence 479
§ 349. Densités conditionnelles (∗) 480
§ 350. Le point de vue hilbertien : l'espérance conditionnelle comme projection 480
23.3 Martingales 482
§ 351. Ma première martingale 482
§ 352. Filtrations, martingales 482
§ 353. Sur- et sous-martingales 484
§ 354. Théorème de convergence des martingales 484
§ 355. Applications 487
23.4 Annexe : probabilités conditionnelles (∗) 487
§ 356. Probabilité conditionnelle sachant une partition dénombrable 487
§ 357. Probabilité conditionnelle sachant une variable aléatoire 488
§ 358. Probabilité conditionnelle sachant une tribu 488
Exercices 489

Partie V : Quelques applications 493

24 Quelques résultats établis par la théorie des probabilités 495
§ 359. La formule de Bernstein 495
§ 360. L'existence de nombres complètement normaux 498
§ 361. Points singuliers du cercle de convergence d'une série entière 499
§ 362. Le théorème de Weierstrass et les polynômes de Bernstein 501
§ 363. En guise de conclusion 506
Exercices 506

25 Simuler informatiquement une loi de probabilité 509
25.1 Simuler une loi discrète 509
§ 364. Simuler une loi de Bernoulli 510
§ 365. Simuler une loi binomiale 510
§ 366. Simuler une loi discrète finie 510
§ 367. Simuler une loi géométrique 511
§ 368. Simuler une loi de Poisson 512
25.2 Simuler une loi continue 513
§ 369. Méthode de l'inverse 513
§ 370. Méthode du rejet 514
§ 371. Mélange de fonctions de répartition 516
25.3 Simuler une loi normale 518
§ 372. Méthode découlant du théorème limite central 518
§ 373. Méthode de la transformée inverse 518
§ 374. Méthode de Box-Muller 518

§ 375. Méthode du rejet 520
§ 376. Simulation d'un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^2$ 521
25.4 Remarques sur les générateurs d'une loi uniforme 523
§ 377. Remarques préliminaires 523
§ 378. Générateur à récurrence linéaire 525
§ 379. Récurrences d'ordre supérieur, ou non linéaires 526
§ 380. Brève remarque historique 527
Exercices 528

26 Méthodes de Monte-Carlo 531
26.1 Estimation d'une moyenne 532
§ 381. L'aiguille de Buffon 532
26.2 Intégration numérique 534
§ 382. Position du problème 534
§ 383. Convergence de la méthode 537
§ 384. Effet de la dimension 537
26.3 Laissons faire le hasard ! 538
§ 385. Un exemple arithmétique : tests de primalité 538
§ 386. Une machine à deviner des conjectures : le modèle de Cramér 542
§ 387. Le hasard et les algorithmes de recherche de solution optimale 543
§ 388. Falsification de données comptables et la loi de Benford 544
Exercices 547

27 Arithmétique et probabilités : une randonnée 549
27.1 Exemple élémentaire 550
27.2 Le théorème de Erdős-Kac et la loi normale 551
27.3 Écarts entre nombres premiers et lois de Poisson 553
27.4 Valeurs propres de matrices aléatoires 555

28 Bosons, fermions et boltzmannions 559
28.1 Le facteur de Boltzmann 559
§ 389. Théorie cinétique des gaz et statistiques non quantiques 559
§ 390. « Nombre de complexions » d'un état 561
§ 391. Un exemple (très) élémentaire 562
§ 392. Le facteur de Boltzmann 563
28.2 Statistiques quantiques 566
§ 393. L'entropie et le paradoxe de Gibbs 566
§ 394. Fermions et bosons 568
§ 395. Nombre d'états occupés 570

29 Processus de Poisson 573
§ 396. Introduction : comment placer des points uniformément sur $\mathbb{R}^+$? . . . 573
§ 397. Processus de comptage 574
§ 398. Processus de Poisson 574
§ 399. Caractérisation des processus de Poisson 575
§ 400. Processus marqués 576
§ 401. Distribution des instants d'arrivée 577
§ 402. Effet physique : le bruit de grenaille 577
§ 403. Âge et temps de vie résiduel 577
§ 404. Processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ 578
§ 405. Processus de Poisson sur $\mathbb{R}^d$ 579
Exercices 579

30 Mouvements browniens **581**
30.1 Une approche heuristique . . . 581
§ 406. L'observation de Robert Brown . . . 581
§ 407. Marche aléatoire discrète et passage à la limite continue . . . 582
§ 408. Limite continue — première approche . . . 583
§ 409. Limite continue — seconde approche . . . 584
§ 410. Une propriété du noyau de la chaleur . . . 586
§ 411. Limite continue d'une marche aléatoire asymétrique . . . 587
§ 412. Marche aléatoire en dimension supérieure . . . 587
§ 413. Temps moyen de visite . . . 588
§ 414. Dernières remarques . . . 589
30.2 Modélisation probabiliste . . . 590
§ 415. Définition . . . 591
§ 416. La loi du mouvement brownien est la loi limite de marches aléatoires . . . 592
§ 417. Loi du mouvement brownien ; mesure de Wiener . . . 593
§ 418. Construction canonique du mouvement brownien . . . 594
§ 419. Covariance . . . 595
30.3 Propriétés des chemins browniens . . . 596
§ 420. Invariances . . . 596
§ 421. Propriétés de régularité . . . 596
§ 422. Récurrence : le théorème de Pólya . . . 597
§ 423. Autres propriétés (∗) . . . 597
§ 424. Construction de Lévy-Ciesielski du mouvement brownien . . . 598
30.4 Mouvement brownien, physique et potentiels . . . 600
§ 425. Le modèle d'Einstein et la détermination du nombre d'Avogadro . . . 600
§ 426. Problème de Dirichlet et méthode de Monte-Carlo . . . 600
§ 427. Mouvement brownien et potentiel capacitif . . . 603
§ 428. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ($d = 1$) . . . 603
§ 429. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ($d = 2$) . . . 604
§ 430. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ($d \geqslant 3$) . . . 605
30.5 Annexes . . . 607
§ 431. Détermination du noyau de la chaleur . . . 607
§ 432. Démonstration du théorème de Paley-Wiener-Zygmund . . . 607
Exercices . . . 609

31 Estimation bayésienne **613**
§ 433. Distribution *a priori* uniforme, et distribution *a posteriori* . . . 613
§ 434. Choix d'une autre distribution *a priori* . . . 616
Exercices . . . 616

32 Retour à pile ou face : loi de l'Arc sinus et séries aléatoires **617**
32.1 L'iniquité flagrante d'un jeu équitable . . . 617
§ 435. La loi de l'Arc sinus . . . 617
32.2 Séries harmoniques de signe aléatoire . . . 619
§ 436. Cas d'une pièce déséquilibrée . . . 619
§ 437. Cas équilibré . . . 619
32.3 Rayon d'une série entière aléatoire . . . 621
§ 438. Le rayon est presque sûrement constant . . . 621
§ 439. Trois rayons sont possibles . . . 621

33 En guise de conclusion : à propos de quelques paradoxes **625**
33.1 Biais d'équiprobabilité 625
§ 440. Biais d'équiprobabilité : le paradoxe des deux cassettes 625
§ 441. Le problème de Monty Hall 626
§ 442. Retour au problème des deux cassettes 627
33.2 Problèmes dus à l'interprétation de l'espérance 628
§ 443. L'espérance d'un jeu n'est pas un critère suffisant 628
§ 444. Paradoxe de Saint-Pétersbourg 628
33.3 Pseudo-paradoxes 631
§ 445. Le paradoxe de Walter Penney 631
Exercices 632

Annexes

A Éléments d'analyse et d'algèbre **637**
A.1 Suites 637
A1. Fini, dénombrable, indénombrable 637
A2. Limite supérieure, limite inférieure 638
A3. Suites de Cauchy 638
A4. Comparaison de suites 639
A5. Formule de Stirling 639
A.2 Séries numériques 639
A6. Définitions 639
A7. Séries positives 639
A8. Produits infinis 640
A9. Convergence absolue 640
A10. Exponentielle complexe 640
A11. Changement d'ordre de sommation 641
A12. Familles sommables positives 642
A13. Familles sommables de signes quelconques 642
A14. Théorème de Fubini pour les séries doubles 642
A15. Théorème de convergence dominée discrète 644
A.3 Fonctions 644
A16. Continuité, continuité à droite 644
A17. Fonctions à variation bornée 644
A18. Fonctions absolument continues 645
A19. Fonction Γ d'Euler 645
A20. Fonction d'erreur, fonction de survie de la loi normale 645
A.4 Fonctions croissantes 646
A21. Continuité, continuité à gauche, à droite 646
A22. Discontinuités de 1re et 2e espèce. 646
A23. Sauts de discontinuité d'une fonction croissante 647
A24. Régularité d'une fonction croissante 647
A25. Décomposition de Lebesgue 648
A26. Une fonction singulière : la fonction de Cantor 648
A27. Pseudo-inverse d'une fonction de répartition 649
A.5 Fonctions convexes 650
A28. Fonctions convexes, strictement convexe, concaves 650
A29. Caractérisation par la pente 651
A30. Caractérisation par la dérivée 651
A31. Cordes, tangentes et demi-tangentes 651
A32. Inégalités de Jensen 652
A.6 Modes de convergence de suites et séries de fonctions 652
A33. Convergence simple et convergence uniforme 652
A34. Théorèmes de Weierstrass 653

A35. Séries de fonctions 653
A.7 Séries entières 653
A36. Rayon 653
A37. Fonctions définies par une série entière 654
A38. Lemme radial d'Abel 654
A39. Produit de Cauchy de deux séries entières 654
A40. Quelques sommes 655
A.8 Calcul intégral 655
A41. Théorème de Fubini 655
A42. Changement de variable dans $\mathbb{R}^n$ 656
A43. Produit de convolution 656
A44. Quelques intégrales utiles 657
A45. Méthode des multiplicateurs de Lagrange 657
A.9 Espaces de Hilbert 657
A46. Espaces préhilbertiens 657
A47. Espaces de Hilbert, bases hilbertiennes 658
A48. Théorème de projection orthogonale 659
A.10 Transformée de Fourier 659
A49. Transformée de Fourier d'une fonction intégrable 659
A50. Distributions. Distributions tempérées 659
A51. Transformée de Fourier d'une distribution 660
A.11 Dénombrement 660
A52. Coefficients binomiaux 660
A53. Formulaire pour les coefficients binomiaux 661
A54. Nombres de Stirling 661
A.12 Topologie élémentaire 663
A55. Ouverts, fermés 663
A56. Espaces complets 663
A.13 Réduction, théorème spectral 663
A57. Adjoint 663
A58. Théorème spectral 664
A59. Matrices symétriques positives, définies positives 664
Exercices 664

B Davantage sur la mesure **665**
B.1 Boréliens 665
A60. Boréliens de $\mathbb{R}$ 665
A61. Boréliens de $\mathbb{R}^n$ 667
A62. Boréliens de $\mathbb{R}^\infty$ 667
A63. Tribus produits, espaces produits 667
B.2 Fonctions mesurables 668
A64. Définition et premières propriétés 668
A65. Tribu engendrée par une variable aléatoire 669
B.3 Un complément au jeu de *pile* ou *face* 670
A66. Additivité dénombrable de $\mathbf{P}_0$ sur la classe $\mathfrak{C}$ des cylindres (∗) 670
B.4 Le lemme de classe monotone 671
A67. π-systèmes et classes monotones 671
A68. Première application : le lemme des coalitions 673
A69. Deuxième application : rôle central de la fonction de répartition 674
A70. Le théorème d'extension de Carathéodory 675
B.5 Le théorème de Radon-Nikodým 675
A71. Mesure absolument continue par rapport à une autre 675
A72. Le théorème de Radon-Nikodým 675
Exercices 676

C Théorèmes d'existence **679**
C.1 Deux exemples simples de théorèmes d'existence 679
A73. Existence d'une variable aléatoire de loi donnée 679
A74. Un exemple de suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires indépendantes 680

C.2 Le théorème fondamental de Kolmogorov 681
A75. Conditions de compatibilité et théorème d'extension 681

D Tables **685**
D.1 Langage ensembliste et langage probabiliste 685
D.2 Probabilités 686
A76. Axiomes 686
A77. Théorèmes d'intégration 686
A78. Formules utiles 686
A79. Tables des principales lois 687
A80. Loi normale centrée réduite 688

E Lexique français-anglais **689**

Références **691**

Index **695**