

Table des matières

<i>Motivation du cours</i>	xix
<i>Index des notations</i>	xxii
1 Convergences et limites	1
1.1 Le problème des limites en physique	1
1.1.a Deux paradoxes sur le théorème de l'énergie cinétique	1
1.1.b Roméo, Juliette et les fluides visqueux	5
1.1.c Barrière de potentiel en mécanique quantique	7
1.1.d Filtre semi-infini se comportant comme guide d'onde	9
1.2 Suites	12
1.2.a Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé	12
1.2.b Suites de Cauchy	12
1.2.c Le théorème du point fixe	14
1.2.d Suites doubles	15
1.2.e Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction	16
1.2.f Suites de fonctions	17
1.3 Séries	21
1.3.a Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé	21
1.3.b Série doublement infinie	23
1.3.c Séries semi-convergentes	24
1.3.d Convergence d'une série à double indice	26
1.3.e Séries de fonctions	26
1.4 Séries entières, fonctions analytiques	28
1.4.a Formules de Taylor	28
1.4.b Une expérience numérique simple	29
1.4.c Rayon d'une série entière	31
1.4.d Fonctions analytiques	32
1.5 Séries asymptotiques et séries divergentes	33
1.5.a Séries asymptotiques	33
1.5.b Séries divergentes et développement asymptotique	35
<i>Exercices</i>	39
2 Mesure et intégrale de Lebesgue	45
2.1 L'intégrale selon B. Riemann	45
2.2 L'intégrale selon H. Lebesgue	48
2.2.a Principe de la construction	48
2.2.b Boréliens	50
2.2.c Mesure de Lebesgue	52
<i>Encadré : Mesure de Lebesgue sur l'ensemble des boréliens</i>	53
2.2.d Tribu de Lebesgue	53
2.2.e Ensembles négligeables	54
2.2.f Mesure sur \mathbb{R}^n	55
2.2.g Construction (canonique) de l'intégrale de Lebesgue	55
2.2.h Fonctions presque partout nulles; espaces $L^1[a; b]$ et $L^1(\mathbb{R})$	58

2.2.i	Et aujourd'hui?	59
<i>Exercices</i>	60
<i>Encadré : Un ensemble non mesurable</i>	62
3	Calcul intégral	63
3.1	L'intégrabilité en pratique	63
3.1.a	Fonctions étalon	63
3.1.b	Théorème de comparaison	64
3.2	Permuter une intégrale et une limite ou une somme	65
3.3	Intégrales paramétrées	66
3.3.a	Continuité d'une intégrale à paramètre	66
3.3.b	Dérivation sous le signe somme	67
3.3.c	Cas où le paramètre est également dans les bornes	67
3.4	Intégrales doubles	68
3.5	Changement de variables	69
<i>Exercices</i>	71
4	Analyse complexe I : fonctions holomorphes	75
4.1	Fonctions holomorphes	75
4.1.a	Définitions	76
4.1.b	Exemples	78
4.1.c	Les opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \bar{z}$	79
4.2	Le théorème de Cauchy	80
4.2.a	Intégration sur des chemins	80
4.2.b	Intégrales sur un cercle	82
4.2.c	Indice d'un chemin	83
4.2.d	Divers théorèmes de Cauchy	83
4.3	Propriétés des fonctions holomorphes	86
4.3.a	Formules de Cauchy; holomorphicité et analyticité	86
4.3.b	Principe du maximum	90
4.3.c	Autres théorèmes	91
4.3.d	Classification des zéros d'une fonction holomorphe	92
<i>Exercices</i>	94
<i>Encadré : Différentiabilité d'une fonction dans \mathbb{R}^2</i>	96
5	Analyse complexe II : singularités et résidus	97
5.1	Singularités d'une fonction	97
5.1.a	Classification des singularités	97
5.1.b	Fonctions méromorphes	99
5.2	Séries de Laurent	100
5.2.a	Introduction et définition	100
5.2.b	Exemples de séries de Laurent	101
5.2.c	Théorème des résidus	102
5.2.d	Calcul pratique des résidus	104
5.3	Application aux calculs d'intégrales...	105
5.3.a	Lemmes de Jordan	105
5.3.b	Intégrales sur \mathbb{R} d'une fraction rationnelle	106
5.3.c	Intégrales de type Fourier	107
5.3.d	Intégrales sur le cercle unité d'une fraction rationnelle	109
5.3.e	Calcul de sommes infinies	110
<i>Exercices</i>	113

6	Analyse complexe III : compléments	119
6.1	Logarithme complexe ; fonctions multivaluées	119
6.1.a	Les logarithmes complexes	119
6.1.b	La fonction racine carrée	121
6.1.c	Fonctions multivaluées ; surfaces de Riemann	122
6.2	Fonctions harmoniques	123
6.2.a	Définitions	123
6.2.b	Propriétés	124
6.2.c	Une astuce pour trouver f en connaissant $\operatorname{Re}(f)$	126
6.3	Prolongements analytiques	128
6.4	Singularités à l'infini	129
6.5	Méthode du col	131
6.5.a	Méthode générale du col	131
6.5.b	La méthode du col réel	134
	<i>Exercices</i>	135
7	Transformations conformes	137
7.1	Transformations conformes	137
7.1.a	Généralités	137
7.1.b	Théorème de Riemann	139
7.1.c	Exemples de transformations conformes	140
7.1.d	La transformation de Schwarz-Christoffel	142
7.2	Application à la théorie du potentiel	145
7.2.a	Transformation de l'équation $\Delta\varphi = \delta$	145
7.2.b	Application à l'électrostatique	146
7.2.c	Application à l'hydrodynamique	148
7.2.d	Théorie du potentiel, paratonnerres, percolation	151
7.3	Problème de Dirichlet et noyau de Poisson	153
	<i>Exercices</i>	156
8	Distributions I	163
8.1	Approche physique	163
8.1.a	Problème des distributions de charges	163
8.1.b	Problème de l'impulsion et des forces lors d'un choc élastique	165
8.2	Définitions et exemples de distributions	166
8.2.a	Distributions régulières	168
8.2.b	Distributions singulières	169
8.2.c	Support d'une distribution	170
8.2.d	Autres exemples	171
8.3	Propriétés élémentaires. Opérations	171
8.3.a	Opérations sur les distributions	171
8.3.b	Dérivée d'une distribution	174
8.4	Variations sur la distribution de Dirac	176
8.4.a	Distribution de Heaviside	176
8.4.b	Distributions de Dirac à plusieurs dimensions	177
8.4.c	La distribution δ'	178
8.4.d	Composition de δ avec une fonction	180
8.4.e	Densités de charge et de courant	181
8.5	Dérivation d'une fonction discontinue	183
8.5.a	Dérivation d'une fonction discontinue en un point	183
8.5.b	Dérivation d'une fonction discontinue sur une surface \mathcal{S}	185
8.5.c	Laplacien d'une fonction discontinue sur une surface \mathcal{S}	187
8.5.d	Application : laplacien de $1/r$ en trois dimensions	188

8.6	La convolution	190
8.6.a	Produit tensoriel de deux fonctions	190
8.6.b	Produit tensoriel de deux distributions	190
8.6.c	Convolution de deux fonctions	192
8.6.d	Notion de mesure floue	193
8.6.e	Convolution de deux distributions	194
8.6.f	Applications	195
8.6.g	Équation de Poisson	197
8.7	Interprétation physique des opérateurs de convolution	197
8.8	Convolution discrète	199
9	Distributions II	201
9.1	Valeur principale de Cauchy	201
9.1.a	Définition	201
9.1.b	Application au calcul de certaines intégrales	202
9.1.c	Notations de Feynman	203
9.1.d	Relations de Kramers-Kronig	205
9.1.e	Quelques équations au sens des distributions	206
9.2	Notions de topologie dans \mathcal{D}'	208
9.2.a	Convergence faible dans \mathcal{D}'	208
9.2.b	Suites de fonctions convergeant vers δ	208
9.2.c	Convergence dans \mathcal{D}' et convergence au sens des fonctions	211
9.2.d	Régularisation d'une distribution	211
9.2.e	Continuité de la convolution	212
9.3	Algèbres de convolution	213
9.4	Résolution d'une équation différentielle avec conditions initiales	215
9.4.a	Cas d'une équation du premier ordre	215
9.4.b	Cas de l'oscillateur harmonique	216
9.4.c	Autres équations provenant de la physique	217
	<i>Exercices</i>	218
10	Espaces de Hilbert ; séries de Fourier	225
10.1	Introduction : insuffisance des espaces vectoriels	225
10.2	Espaces préhilbertiens	227
10.2.a	Cas de la dimension finie	229
10.2.b	Projection sur des s.e.v. de dimension finie	230
10.2.c	Inégalité de Bessel	231
10.3	Espaces de Hilbert	231
10.3.a	Bases hilbertiennes	232
10.3.b	L'espace ℓ^2	236
10.3.c	L'espace $L^2 [0; a]$	236
10.3.d	L'espace $L^2(\mathbb{R})$	237
10.4	Développement en série de Fourier	238
10.4.a	Coefficients de Fourier d'une fonction	238
10.4.b	Convergence quadratique	238
10.4.c	Série de Fourier d'une fonction $f \in L^1 [0; a]$	240
10.4.d	Convergence ponctuelle de la série de Fourier	241
10.4.e	Convergence uniforme de la série de Fourier	242
10.4.f	Phénomène de Gibbs	244
10.4.g	Rapide extension aux distributions	244
	<i>Encadré : Convergence ponctuelle et phénomène de Gibbs</i>	245
	<i>Exercices</i>	246

11	Transformée de Fourier des fonctions	251
11.1	Transformée de Fourier d'une fonction de L^1	251
11.1.a	Définition	251
11.1.b	Exemples	252
11.1.c	Espace L^1	253
11.1.d	Propriétés élémentaires	254
11.1.e	Inversion	255
11.1.f	Extension de la formule d'inversion	257
11.2	Propriétés de la transformation de Fourier	258
11.2.a	Transposition et translation	258
11.2.b	Changement d'échelle	259
11.2.c	Dérivation	259
11.2.d	Fonctions à décroissance rapide	260
11.3	Transformée de Fourier d'une fonction de L^2	261
11.3.a	Espace \mathcal{S}	261
11.3.b	Transformée de Fourier dans L^2	262
11.4	Transformées de Fourier et convolution	264
11.4.a	Formule de convolution	264
11.4.b	Cas particuliers de la formule de convolution	265
11.5	Conventions différentes	265
	<i>Exercices</i>	265
	<i>Encadré : Prolongement d'un opérateur linéaire continu</i>	269
12	Transformée de Fourier des distributions	271
12.1	Définition et propriétés	271
12.1.a	Distributions tempérées	272
12.1.b	Transformées de Fourier des distributions tempérées	273
12.1.c	Exemples	274
12.1.d	Transformation de Fourier à plusieurs dimensions	276
12.1.e	Formule d'inversion	277
12.2	Peigne de Dirac	278
12.2.a	Définition et propriétés	278
12.2.b	Transformée de Fourier d'une fonction périodique	279
12.2.c	Formule sommatoire de Poisson	280
12.2.d	Application aux calculs de séries	280
12.3	Phénomène de Gibbs	282
12.4	Application à l'optique physique	284
12.4.a	Lien entre diaphragme et figure de diffraction	284
12.4.b	Diaphragme composé d'une infinité de fentes infiniment fines	285
12.4.c	Nombre fini de fentes infiniment fines	286
12.4.d	Nombre fini de fentes de dimension finie	288
12.4.e	Pupille circulaire	290
12.5	Limitations de l'analyse de Fourier et ondelettes	291
	<i>Exercices</i>	293
13	Transformation de Laplace	299
13.1	Définition et sommabilité	299
13.1.a	Définition	300
13.1.b	Sommabilité	301
13.1.c	Propriétés de la transformée	303
13.2	Inversion	304
13.3	Propriétés élémentaires et exemples de transformées de Laplace	305
13.3.a	Translation	305

13.3.b	Convolution	306
13.3.c	Dérivation et intégration	306
13.3.d	Exemples	308
13.4	Transformation de Laplace des distributions	309
13.4.a	Définition	309
13.4.b	Propriétés	309
13.4.c	Exemples	310
13.4.d	Transformée en z	311
13.4.e	Lien entre transformées de Laplace et de Fourier	311
13.5	Applications physiques; problème de Cauchy	312
13.5.a	Importance du problème de Cauchy	312
13.5.b	Un exemple simple	313
13.5.c	Évolution libre du champ électromagnétique	314
	<i>Exercices</i>	316
14	Applications physiques de la transformée de Fourier	319
14.1	Justification de l'analyse en régime sinusoïdal	319
14.2	Champs longitudinaux et champs transverses	321
14.3	Relations d'incertitude de Heisenberg	323
14.4	Signaux analytiques	328
14.5	Autocorrélation d'une fonction d'énergie finie	330
14.5.a	Définition	330
14.5.b	Propriétés	331
14.5.c	Intercorrélation	332
14.6	Fonctions de puissance finie	332
14.6.a	Définitions	332
14.6.b	Autocorrélation	333
14.7	Application à l'optique : théorème de Wiener-Khintchine	333
	<i>Exercices</i>	337
15	Bras, kets et toutes ces sortes de choses	339
15.1	Rappels de dimension finie	339
15.1.a	Produit scalaire et théorème de représentation	339
15.1.b	Adjoint	340
15.1.c	Endomorphismes symétriques ou hermitiens	340
15.2	Kets et Bras	341
15.2.a	Kets $ \psi\rangle \in H$	341
15.2.b	Bras $\langle\psi \in H'$	342
15.2.c	Bras généralisés	344
15.2.d	Kets généralisés	344
15.2.e	« $\text{Id} = \sum \varphi_n\rangle \langle\varphi_n $ »	346
15.2.f	Bases généralisées	346
15.3	Opérateurs linéaires	348
15.3.a	Opérateurs	348
15.3.b	Adjoint	350
15.3.c	Opérateurs bornés, fermés, fermables	351
15.3.d	Spectre discret et spectre continu	352
15.4	Opérateurs hermitiens; opérateurs auto-adjoints	354
15.4.a	Définitions	354
15.4.b	Éléments propres	356
15.4.c	Vecteurs propres généralisés	357
15.4.d	Représentation « matricielle »	358
15.4.e	Résumé des propriétés des opérateurs P et X	361
	<i>Exercices</i>	363

16 Fonctions de Green	367
16.1 Généralités sur les fonctions de Green	367
16.2 Un exemple pédagogique : l'oscillateur harmonique	369
16.2.a Utilisation de la transformation de Laplace	370
16.2.b Utilisation de la transformation de Fourier	371
16.3 Électromagnétisme et opérateur de d'Alembert	374
16.3.a Calcul des fonctions de Green avancée et retardée	374
16.3.b Potentiels retardés	377
16.3.c Écriture covariante des fonctions de Green avancée et retardée	381
16.3.d Rayonnement	381
16.4 Équation de la chaleur	382
16.4.a Cas unidimensionnel	382
16.4.b Cas tridimensionnel	385
16.5 Mécanique quantique	386
16.6 Équation de Klein-Gordon	388
<i>Exercices</i>	391
17 Tenseurs	393
17.1 Tenseurs dans un espace affine	393
17.1.a Vecteurs	394
17.1.b Convention d'Einstein	395
17.1.c Formes linéaires	396
17.1.d Applications linéaires	399
17.1.e Transformations de Lorentz	399
17.2 Produit tensoriel d'espaces. Tenseurs	400
17.2.a Existence du produit tensoriel de deux espaces	400
17.2.b Produit tensoriel de deux formes linéaires : tenseurs d'ordre $\binom{0}{2}$	401
17.2.c Produit tensoriel de deux vecteurs : tenseurs d'ordre $\binom{2}{0}$	403
17.2.d Applications linéaires : tenseurs d'ordre $\binom{1}{1}$	404
17.2.e Tenseurs d'ordre $\binom{p}{q}$	406
17.3 La métrique : monter et descendre les indices	407
17.3.a Métrique et pseudo-métrique	407
17.3.b Dualité naturelle par la métrique	408
17.3.c Gymnastique : élever et abaisser des indices	410
17.4 Opérations sur les tenseurs	412
17.5 Changements de coordonnées	414
17.5.a Coordonnées curvilignes	414
17.5.b Vecteurs de base	415
17.5.c Transformation des vecteurs physiques	417
17.5.d Transformation des formes linéaires	418
17.5.e Transformation d'un champ de tenseurs quelconque	418
17.5.f Brève conclusion	418
18 Formes différentielles	421
18.1 Algèbre extérieure	421
18.1.a 1-formes	421
18.1.b 2-formes extérieures	422
18.1.c k -formes extérieures	423
18.1.d Produit extérieur	424
18.2 Formes différentielles sur un espace vectoriel	426
18.2.a Définition	426
18.2.b Dérivée extérieure	426

18.3	Intégration des formes différentielles	427
18.4	Théorème de Poincaré	430
18.5	Lien avec le calcul vectoriel : gradient, divergence, rotationnel	432
18.5.a	Formes différentielles en dimension 3	432
18.5.b	Existence du potentiel scalaire électrostatique	433
18.5.c	Existence du potentiel vecteur	434
18.5.d	Monopôles magnétiques	435
18.6	L'électromagnétisme dans le langage des formes différentielles	435
	<i>Encadré : Intégration des formes différentielles</i>	442
19	Groupes et représentations de groupes	443
19.1	Groupes	443
19.2	Représentations linéaires des groupes	444
19.3	Le groupe $SO(3)$ et les vecteurs	446
19.4	Le groupe $SU(2)$ et les spineurs	450
	<i>Encadré : Double connexité de $SO(3)$ et tour de magie</i>	454
19.5	Sphère de Riemann et spin	457
	<i>Exercices</i>	458
20	Introduction aux probabilités	459
20.1	Introduction	460
20.2	Le mystérieux univers Ω	461
20.3	Définitions élémentaires	462
20.3.a	Événements	463
20.3.b	Probabilités	465
20.3.c	Formule de Poincaré	466
20.4	Probabilités conditionnelles	467
20.5	Événements indépendants	469
	<i>Exercices</i>	470
21	Variables aléatoires	473
21.1	Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?	473
21.2	Lois, fonctions de répartition, densité	474
21.2.a	Loi de probabilité, fonction de répartition	474
21.2.b	Variables aléatoires discrètes	477
21.2.c	Variables aléatoires (absolument) continues	478
21.2.d	Lois classiques	479
21.3	Espérance et variance	482
21.3.a	Espérance : cas discret	482
21.3.b	Espérance : cas continu et généralisation	484
21.3.c	Variance et écart-type	485
21.3.d	Moments d'ordres supérieurs	487
21.3.e	Moyenne et médiane	487
21.4	Vecteurs aléatoires	488
21.4.a	Couples discrets	488
21.4.b	Couples absolument continus	489
21.4.c	Covariance	491
21.4.d	Vecteurs aléatoires	494
21.5	Indépendance	494
21.5.a	Indépendance de deux variables aléatoires	494
	<i>Encadré : Propriétés des variables indépendantes</i>	496
21.5.b	Cas particuliers	497
21.5.c	Indépendance de n variables aléatoires	497

21.6	Image d'une variable aléatoire	498
21.6.a	Loi et densité	498
21.6.b	Fonction caractéristique	499
21.6.c	Fonction génératrice	500
21.6.d	Image d'un vecteur aléatoire	500
21.7	Somme et produit de variables aléatoires	501
21.7.a	Somme de variables aléatoires	501
21.7.b	Produit et quotient de variables aléatoires	502
21.7.c	Exemples de stabilité : lois de Poisson et lois normales	503
	<i>Exercices</i>	504
	<i>Encadré : Intégrale de Riemann-Stieltjes</i>	510
22	Théorèmes limites en probabilités	511
22.1	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	511
22.2	Loi de Poisson comme limite de loi binomiale	514
22.3	Convergences en probabilité, presque sûre, en loi	515
22.4	La loi des grands nombres	517
22.5	Le théorème central limite	519
22.6	Approximations normales de lois discrètes	523
22.6.a	Approximation d'une loi binomiale par une loi normale	523
22.6.b	Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale	524
	<i>Exercices</i>	526

Annexes

A	Rappels sur la topologie et les e.v.n.	533
1.1	Topologie, espace topologique	533
1.2	Espaces vectoriels normés	536
A.2.a	Normes, semi-normes	536
A.2.b	Boules et topologie	537
A.2.c	Comparaison de suites	539
A.2.d	Théorèmes de Bolzano-Weierstrass	539
A.2.e	Comparaison des normes	539
A.2.f	Norme linéaire	541
	<i>Exercice</i>	541
B	Rappels élémentaires sur le calcul différentiel	543
2.1	Différentielle d'une application à valeurs réelles	543
B.1.a	Fonction réelle de la variable réelle	543
B.1.b	Différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	544
B.1.c	Notations tensorielles	544
2.2	Différentielle d'une application à valeurs dans \mathbb{R}^p	545
2.3	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	546
C	Représentation matricielle	549
3.1	Dualité	549
3.2	Application à la représentation matricielle	550
C.2.a	Matrice d'une famille de vecteurs	550
C.2.b	Matrice d'une application linéaire	550
C.2.c	Matrice de changement de base	551
C.2.d	Formules de changement de bases	551
C.2.e	Cas des bases orthonormées	552
D	Quelques démonstrations	553

Tables

Table des transformées de Fourier & de Laplace	562
Table des lois usuelles	567
Table de la loi normale	568
Bibliographie	569
Références	572
Liste alphabétique des portraits	577
Index	578