

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Équations différentielles, problèmes de Cauchy</b>	<b>11</b>
1.1	Généralités . . . . .	11
1.1.1	Fonctions vectorielles . . . . .	11
1.1.2	Équations différentielles . . . . .	12
1.1.3	Quelques situations régies par des équations différentielles .	13
1.1.4	Forme normalisée . . . . .	16
1.1.5	Régularité des solutions. . . . .	16
1.1.6	Réduction à un système du premier ordre . . . . .	17
1.2	Le problème de Cauchy . . . . .	17
1.2.1	Formulations du problème . . . . .	17
1.2.2	Lemme de Gronwall . . . . .	20
1.2.3	Le théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	21
1.2.4	Étude d'un exemple . . . . .	24
1.2.5	Propriétés des solutions maximales . . . . .	26
1.2.6	Cas d'échec du théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .	30
1.2.7	Notion d'étude qualitative . . . . .	33
1.2.8	Cas d'une équation non normalisée . . . . .	34
1.2.9	Trajectoires . . . . .	36
1.2.10	Régularité par rapport aux données initiales . . . . .	39
1.3	Exercices corrigés . . . . .	39
<b>2</b>	<b>Équations différentielles linéaires</b>	<b>51</b>
2.1	Définitions et vocabulaire . . . . .	51
2.1.1	Système différentiel linéaire . . . . .	51
2.1.2	Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n$ . . . . .	53
2.2	Propriétés des équations linéaires . . . . .	54
2.2.1	Équation homogène associée . . . . .	54
2.2.2	Superposition des seconds membres . . . . .	56
2.3	Le problème de Cauchy dans le cas linéaire . . . . .	57
2.3.1	Solutions maximales des équations linéaires . . . . .	57
2.3.2	Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire . . . . .	58
2.3.3	Base de solutions de l'équation homogène . . . . .	59

2.4	Équations linéaires scalaires du premier ordre . . . . .	63
2.4.1	Résolution de l'équation homogène . . . . .	63
2.4.2	Solution particulière de l'équation avec second membre . . .	63
2.4.3	Cas d'une équation non normalisée . . . . .	66
2.5	Systèmes linéaires à coefficients constants . . . . .	68
2.5.1	Résolution de $U' = AU$ lorsque $A$ est diagonalisable . . . .	68
2.5.2	Résolution de $U' = AU$ lorsque $A$ n'est pas diagonalisable .	72
2.5.3	Résolution de $X' = AX + B$ . . . . .	73
2.6	Méthode de variation des constantes . . . . .	74
2.7	Équations linéaires scalaires d'ordre $n$ . . . . .	76
2.7.1	Le problème de Cauchy . . . . .	76
2.7.2	Base de solutions de l'équation homogène . . . . .	77
2.7.3	Recherche d'une solution particulière . . . . .	79
2.8	Équations linéaires scalaires d'ordre 2 . . . . .	80
2.8.1	L'équation homogène : abaissement de l'ordre . . . . .	80
2.8.2	Solution particulière : variation des constantes . . . . .	83
2.9	Solutions développables en série entière . . . . .	85
2.10	Équations scalaires à coefficients constants . . . . .	88
2.10.1	Équation homogène . . . . .	88
2.10.2	Cas d'un second membre exponentielle-polynôme . . . . .	90
2.10.3	Utilisation d'une solution fondamentale . . . . .	93
2.11	Exercices corrigés . . . . .	94
<b>3</b>	<b>Équations différentielles non linéaires du premier ordre</b>	<b>113</b>
3.1	Équations à variables séparables . . . . .	113
3.2	Équations différentielles exactes . . . . .	115
3.3	Équations de Bernoulli et de Riccati . . . . .	118
3.3.1	Équation de Bernoulli . . . . .	118
3.3.2	Équation de Riccati . . . . .	121
3.4	Équations homogènes en $y$ et $x$ . . . . .	122
3.4.1	Généralités sur les équations homogènes . . . . .	122
3.4.2	Résolution de l'équation homogène normalisée . . . . .	124
3.4.3	Résolution de l'équation homogène non normalisée . . . . .	129
3.5	Équations incomplètes . . . . .	138
3.5.1	Équations incomplètes en $x$ . . . . .	138
3.5.2	Équations incomplètes en $y$ . . . . .	143
3.6	Équations de Lagrange et de Clairaut . . . . .	146
3.6.1	Équation de Lagrange . . . . .	146
3.6.2	Équation de Clairaut . . . . .	151
3.7	Exercices corrigés . . . . .	156

<b>4</b>	<b>Équations différentielles autonomes</b>	<b>173</b>
4.1	Propriétés élémentaires des systèmes dynamiques . . . . .	173
4.1.1	Invariance par translation . . . . .	173
4.1.2	Interprétation physique . . . . .	175
4.1.3	Intervalle de définition des solutions . . . . .	176
4.1.4	Points d'équilibre . . . . .	176
4.1.5	Orbites . . . . .	177
4.1.6	Champs de vecteurs . . . . .	180
4.1.7	Intégrales premières . . . . .	182
4.2	Champs de vecteurs linéaires de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	187
4.2.1	Cas de deux valeurs propres réelles distinctes non nulles . . . . .	188
4.2.2	Cas de deux valeurs propres complexes conjuguées . . . . .	190
4.2.3	Cas d'une valeur propre double non nulle . . . . .	193
4.2.4	Cas d'une valeur propre nulle . . . . .	194
4.3	Stabilité . . . . .	195
4.3.1	Stabilité d'un équilibre . . . . .	195
4.3.2	Étude de la stabilité de l'origine pour un champ linéaire . . . . .	198
4.3.3	Linéarisation au voisinage d'un équilibre . . . . .	200
4.3.4	Stabilité d'une solution . . . . .	202
4.3.5	Pour aller plus loin . . . . .	203
4.4	Exercices corrigés . . . . .	205
<b>5</b>	<b>EDP d'ordre 1</b>	<b>231</b>
5.1	EDP : généralités et exemples . . . . .	231
5.1.1	Vocabulaire . . . . .	231
5.1.2	Exemples d'EDP en physique. . . . .	232
5.1.3	La notation multi-indices . . . . .	236
5.1.4	EDP quasi-linéaires, semi-linéaires, linéaires . . . . .	236
5.2	L'équation $F \cdot \nabla u = 0$ . . . . .	237
5.2.1	L'équation $\partial_j u = 0$ . . . . .	237
5.2.2	L'équation de transport . . . . .	240
5.2.3	L'équation $F \cdot \nabla u = 0$ . . . . .	241
5.2.4	Le problème de Cauchy pour l'équation de transport . . . . .	243
5.2.5	Hypersurfaces et problème de Cauchy général . . . . .	244
5.2.6	Le problème de Cauchy pour l'équation $F \cdot \nabla u = 0$ . . . . .	245
5.3	EDP quasi-linéaires du premier ordre . . . . .	251
5.3.1	Résolution sous forme implicite . . . . .	251
5.3.2	Le problème de Cauchy pour une EDP quasi-linéaire . . . . .	253
5.4	Exercices corrigés . . . . .	258

<b>6</b>	<b>Équations d'évolution</b>	<b>273</b>
6.1	L'équation des ondes en dimension 1 d'espace . . . . .	273
6.1.1	L'équation des ondes sur $\mathbb{R}$ par la méthode de D'Alembert .	273
6.1.2	Le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ pour l'équation des ondes . .	276
6.2	Équation de la chaleur homogène . . . . .	278
6.2.1	Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$	278
6.2.2	Recherche d'une solution par transformation de Fourier . .	279
6.2.3	Solution du problème de Cauchy . . . . .	281
6.2.4	Solution du problème au sens des distributions . . . . .	285
6.2.5	Étude du noyau de la chaleur et conséquences . . . . .	292
6.3	Le théorème de Cauchy-Kovalevsky . . . . .	295
6.3.1	Exemple introductif : DSE des solutions d'une EDO . . . .	295
6.3.2	Fonctions analytiques de plusieurs variables réelles . . . .	296
6.3.3	Le problème de Cauchy pour une équation d'évolution . . .	297
6.3.4	Unicité et existence d'une solution analytique . . . . .	298
6.3.5	Le théorème de Cauchy-Kovalevsky d'évolution . . . . .	300
6.3.6	Le théorème d'Holmgren . . . . .	303
6.3.7	Cas d'une équation non résolue en $\partial_t^m u$ . . . . .	304
6.3.8	EDP quasi-linéaires d'ordre 1 dans le cas analytique . . . .	307
6.3.9	EDP quasi-linéaires d'ordre 2 . . . . .	311
6.4	Caractéristiques et classification . . . . .	315
6.4.1	Caractéristiques des EDP semi-linéaires d'ordre 1 . . . . .	315
6.4.2	Caractéristiques des EDP semi-linéaires d'ordre 2 . . . . .	317
6.4.3	Classification des EDP semi-linéaires d'ordre 2 . . . . .	320
6.5	Exercices corrigés . . . . .	324
<b>7</b>	<b>Équations intégrales et problèmes de Sturm-Liouville</b>	<b>351</b>
7.1	Opérateurs autoadjoints . . . . .	351
7.1.1	Définitions et rappels . . . . .	351
7.1.2	Éléments propres d'un opérateur autoadjoint . . . . .	353
7.2	Opérateurs intégraux . . . . .	354
7.2.1	Définition et premiers exemples . . . . .	354
7.2.2	Opérateurs intégraux bornés sur $L^2$ . . . . .	355
7.2.3	Adjoint d'un opérateur intégral . . . . .	356
7.3	Équations intégrales de Fredholm . . . . .	358
7.3.1	Équations de Fredholm de première et deuxième espèce . .	358
7.3.2	Équation intégrale à noyau dégénéré . . . . .	359
7.3.3	L'équation aux valeurs propres : théorie de Hilbert-Schmidt	365
7.3.4	L'équation avec second membre : alternative de Fredholm .	371
7.4	Problèmes de Sturm-Liouville . . . . .	372
7.4.1	Conditions aux limites . . . . .	372
7.4.2	Formes autoadjointes d'une équation du second ordre . . .	373
7.4.3	Le problème aux valeurs propres de Sturm-Liouville . . . .	374

7.4.4	Fonction de Green d'un problème de Sturm-Liouville . . . . .	383
7.4.5	Développement en série de fonctions propres . . . . .	392
7.4.6	Autres problèmes de Sturm-Liouville . . . . .	397
7.5	Exercices corrigés . . . . .	398
<b>8</b>	<b>Problèmes mixtes - Méthode de séparation des variables</b>	<b>413</b>
8.1	Problème mixte pour l'équation de la chaleur . . . . .	413
8.1.1	Position du problème . . . . .	413
8.1.2	Étude de l'unicité de la solution . . . . .	414
8.1.3	Réduction à des conditions aux limites homogènes . . . . .	415
8.1.4	Séparation des variables . . . . .	415
8.1.5	Superposition de solutions élémentaires . . . . .	417
8.2	Corde vibrante fixée aux extrémités . . . . .	420
8.2.1	Séparation des variables. . . . .	421
8.2.2	Superposition des solutions élémentaires . . . . .	421
8.3	Équation de Schrödinger . . . . .	426
8.3.1	Séparation de la variable $t$ . . . . .	426
8.3.2	Solutions stationnaires pour l'oscillateur harmonique . . . . .	427
8.3.3	Le problème de Cauchy pour l'oscillateur harmonique . . . . .	430
8.4	Équation des membranes vibrantes . . . . .	432
8.4.1	Séparation des variables . . . . .	433
8.4.2	Équation et fonctions de Bessel . . . . .	435
8.4.3	Solution du problème de Sturm-Liouville-Bessel . . . . .	439
8.4.4	Orthogonalité des fonctions de Bessel . . . . .	440
8.4.5	Superposition de solutions élémentaires . . . . .	443
8.5	Exercices corrigés . . . . .	446
<b>9</b>	<b>EDP elliptiques</b>	<b>455</b>
9.1	Généralités . . . . .	455
9.1.1	Fonctions harmoniques . . . . .	455
9.1.2	Problème de Cauchy versus problème de Dirichlet . . . . .	456
9.1.3	Principe du maximum pour les EDP elliptiques . . . . .	457
9.1.4	Le problème de Dirichlet sur un ouvert borné . . . . .	460
9.2	Fonctions harmoniques en dimension 2 . . . . .	463
9.2.1	Lien avec les fonctions holomorphes . . . . .	463
9.2.2	Application au problème de Dirichlet pour le disque . . . . .	465
9.3	Fonctions harmoniques en dimension 3 . . . . .	469
9.3.1	Séparation des variables $r, \theta, \varphi$ . . . . .	469
9.3.2	Problème de Legendre d'ordre 0 : polynômes de Legendre . . . . .	471
9.3.3	Problème de Legendre d'ordre $m$ : fonctions de Legendre . . . . .	476
9.3.4	Harmoniques sphériques - Partie radiale . . . . .	480
9.3.5	Problème de Dirichlet pour la boule . . . . .	481
9.4	L'atome d'hydrogène . . . . .	482

9.4.1	Équation de Schrödinger à potentiel radial . . . . .	482
9.4.2	Cas du potentiel coulombien . . . . .	484
9.5	Exercices corrigés . . . . .	491
<b>A</b>	<b>Calcul différentiel</b>	<b>499</b>
A.1	Différentiabilité . . . . .	499
A.1.1	Différentielle en un point . . . . .	499
A.1.2	Cas particuliers fondamentaux . . . . .	500
A.1.3	Propriétés de la différentiabilité . . . . .	501
A.1.4	Dérivée suivant un vecteur . . . . .	501
A.1.5	Dérivées partielles . . . . .	502
A.1.6	Lien entre différentielle et dérivées partielles . . . . .	503
A.1.7	Notion de gradient . . . . .	504
A.1.8	Matrice jacobienne . . . . .	505
A.1.9	Dérivées partielles d'une fonction composée . . . . .	505
A.2	Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ . . . . .	506
A.2.1	$\mathcal{C}^1$ implique différentiable . . . . .	506
A.2.2	Dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 2 . . . . .	507
A.2.3	Théorème des fonctions implicites . . . . .	508
A.2.4	Difféomorphismes . . . . .	510
A.3	Arcs paramétrés . . . . .	511
<b>B</b>	<b>Distributions et transformation de Fourier sur <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>515</b>
B.1	T.F. et convolution dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	515
B.2	Distributions sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	516
B.2.1	Définition et exemples élémentaires . . . . .	516
B.2.2	Opérations élémentaires sur les distributions . . . . .	517
B.2.3	Produit par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et dérivées partielles . . . . .	517
B.2.4	Produit tensoriel . . . . .	517
B.2.5	Support des distributions . . . . .	519
B.2.6	Produit de convolution . . . . .	519
B.2.7	Transformée de Fourier . . . . .	519
B.2.8	Formule de Green et formule des sauts en dimension $n$ . . . . .	521
	<b>Bibliographie</b>	<b>523</b>
	<b>Index</b>	<b>525</b>