

Table des matières

1	Équations différentielles, problèmes de Cauchy	11
1.1	Généralités	11
1.1.1	Fonctions vectorielles	11
1.1.2	Équations différentielles	12
1.1.3	Quelques situations régies par des équations différentielles .	13
1.1.4	Forme normalisée	16
1.1.5	Régularité des solutions.	16
1.1.6	Réduction à un système du premier ordre	17
1.2	Le problème de Cauchy	17
1.2.1	Formulations du problème	17
1.2.2	Lemme de Gronwall	20
1.2.3	Le théorème de Cauchy-Lipschitz	21
1.2.4	Étude d'un exemple	24
1.2.5	Propriétés des solutions maximales	26
1.2.6	Cas d'échec du théorème de Cauchy-Lipschitz	30
1.2.7	Notion d'étude qualitative	33
1.2.8	Cas d'une équation non normalisée	34
1.2.9	Trajectoires	36
1.2.10	Régularité par rapport aux données initiales	39
1.3	Exercices corrigés	39
2	Équations différentielles linéaires	51
2.1	Définitions et vocabulaire	51
2.1.1	Système différentiel linéaire	51
2.1.2	Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n	53
2.2	Propriétés des équations linéaires	54
2.2.1	Équation homogène associée	54
2.2.2	Superposition des seconds membres	56
2.3	Le problème de Cauchy dans le cas linéaire	57
2.3.1	Solutions maximales des équations linéaires	57
2.3.2	Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire	58
2.3.3	Base de solutions de l'équation homogène	59

2.4	Équations linéaires scalaires du premier ordre	63
2.4.1	Résolution de l'équation homogène	63
2.4.2	Solution particulière de l'équation avec second membre . . .	63
2.4.3	Cas d'une équation non normalisée	66
2.5	Systèmes linéaires à coefficients constants	68
2.5.1	Résolution de $U' = AU$ lorsque A est diagonalisable	68
2.5.2	Résolution de $U' = AU$ lorsque A n'est pas diagonalisable .	72
2.5.3	Résolution de $X' = AX + B$	73
2.6	Méthode de variation des constantes	74
2.7	Équations linéaires scalaires d'ordre n	76
2.7.1	Le problème de Cauchy	76
2.7.2	Base de solutions de l'équation homogène	77
2.7.3	Recherche d'une solution particulière	79
2.8	Équations linéaires scalaires d'ordre 2	80
2.8.1	L'équation homogène : abaissement de l'ordre	80
2.8.2	Solution particulière : variation des constantes	83
2.9	Solutions développables en série entière	85
2.10	Équations scalaires à coefficients constants	88
2.10.1	Équation homogène	88
2.10.2	Cas d'un second membre exponentielle-polynôme	90
2.10.3	Utilisation d'une solution fondamentale	93
2.11	Exercices corrigés	94
3	Équations différentielles non linéaires du premier ordre	113
3.1	Équations à variables séparables	113
3.2	Équations différentielles exactes	115
3.3	Équations de Bernoulli et de Riccati	118
3.3.1	Équation de Bernoulli	118
3.3.2	Équation de Riccati	121
3.4	Équations homogènes en y et x	122
3.4.1	Généralités sur les équations homogènes	122
3.4.2	Résolution de l'équation homogène normalisée	124
3.4.3	Résolution de l'équation homogène non normalisée	129
3.5	Équations incomplètes	138
3.5.1	Équations incomplètes en x	138
3.5.2	Équations incomplètes en y	143
3.6	Équations de Lagrange et de Clairaut	146
3.6.1	Équation de Lagrange	146
3.6.2	Équation de Clairaut	151
3.7	Exercices corrigés	156

4	Équations différentielles autonomes	173
4.1	Propriétés élémentaires des systèmes dynamiques	173
4.1.1	Invariance par translation	173
4.1.2	Interprétation physique	175
4.1.3	Intervalle de définition des solutions	176
4.1.4	Points d'équilibre	176
4.1.5	Orbites	177
4.1.6	Champs de vecteurs	180
4.1.7	Intégrales premières	182
4.2	Champs de vecteurs linéaires de \mathbb{R}^2	187
4.2.1	Cas de deux valeurs propres réelles distinctes non nulles	188
4.2.2	Cas de deux valeurs propres complexes conjuguées	190
4.2.3	Cas d'une valeur propre double non nulle	193
4.2.4	Cas d'une valeur propre nulle	194
4.3	Stabilité	195
4.3.1	Stabilité d'un équilibre	195
4.3.2	Étude de la stabilité de l'origine pour un champ linéaire	198
4.3.3	Linéarisation au voisinage d'un équilibre	200
4.3.4	Stabilité d'une solution	202
4.3.5	Pour aller plus loin	203
4.4	Exercices corrigés	205
5	EDP d'ordre 1	231
5.1	EDP : généralités et exemples	231
5.1.1	Vocabulaire	231
5.1.2	Exemples d'EDP en physique.	232
5.1.3	La notation multi-indices	236
5.1.4	EDP quasi-linéaires, semi-linéaires, linéaires	236
5.2	L'équation $F \cdot \nabla u = 0$	237
5.2.1	L'équation $\partial_j u = 0$	237
5.2.2	L'équation de transport	240
5.2.3	L'équation $F \cdot \nabla u = 0$	241
5.2.4	Le problème de Cauchy pour l'équation de transport	243
5.2.5	Hypersurfaces et problème de Cauchy général	244
5.2.6	Le problème de Cauchy pour l'équation $F \cdot \nabla u = 0$	245
5.3	EDP quasi-linéaires du premier ordre	251
5.3.1	Résolution sous forme implicite	251
5.3.2	Le problème de Cauchy pour une EDP quasi-linéaire	253
5.4	Exercices corrigés	258

6	Équations d'évolution	273
6.1	L'équation des ondes en dimension 1 d'espace	273
6.1.1	L'équation des ondes sur \mathbb{R} par la méthode de D'Alembert .	273
6.1.2	Le problème de Cauchy sur \mathbb{R} pour l'équation des ondes . .	276
6.2	Équation de la chaleur homogène	278
6.2.1	Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur sur \mathbb{R}	278
6.2.2	Recherche d'une solution par transformation de Fourier . .	279
6.2.3	Solution du problème de Cauchy	281
6.2.4	Solution du problème au sens des distributions	285
6.2.5	Étude du noyau de la chaleur et conséquences	292
6.3	Le théorème de Cauchy-Kovalevsky	295
6.3.1	Exemple introductif : DSE des solutions d'une EDO	295
6.3.2	Fonctions analytiques de plusieurs variables réelles	296
6.3.3	Le problème de Cauchy pour une équation d'évolution . . .	297
6.3.4	Unicité et existence d'une solution analytique	298
6.3.5	Le théorème de Cauchy-Kovalevsky d'évolution	300
6.3.6	Le théorème d'Holmgren	303
6.3.7	Cas d'une équation non résolue en $\partial_t^m u$	304
6.3.8	EDP quasi-linéaires d'ordre 1 dans le cas analytique	307
6.3.9	EDP quasi-linéaires d'ordre 2	311
6.4	Caractéristiques et classification	315
6.4.1	Caractéristiques des EDP semi-linéaires d'ordre 1	315
6.4.2	Caractéristiques des EDP semi-linéaires d'ordre 2	317
6.4.3	Classification des EDP semi-linéaires d'ordre 2	320
6.5	Exercices corrigés	324
7	Équations intégrales et problèmes de Sturm-Liouville	351
7.1	Opérateurs autoadjoints	351
7.1.1	Définitions et rappels	351
7.1.2	Éléments propres d'un opérateur autoadjoint	353
7.2	Opérateurs intégraux	354
7.2.1	Définition et premiers exemples	354
7.2.2	Opérateurs intégraux bornés sur L^2	355
7.2.3	Adjoint d'un opérateur intégral	356
7.3	Équations intégrales de Fredholm	358
7.3.1	Équations de Fredholm de première et deuxième espèce . .	358
7.3.2	Équation intégrale à noyau dégénéré	359
7.3.3	L'équation aux valeurs propres : théorie de Hilbert-Schmidt	365
7.3.4	L'équation avec second membre : alternative de Fredholm .	371
7.4	Problèmes de Sturm-Liouville	372
7.4.1	Conditions aux limites	372
7.4.2	Formes autoadjointes d'une équation du second ordre . . .	373
7.4.3	Le problème aux valeurs propres de Sturm-Liouville	374

7.4.4	Fonction de Green d'un problème de Sturm-Liouville	383
7.4.5	Développement en série de fonctions propres	392
7.4.6	Autres problèmes de Sturm-Liouville	397
7.5	Exercices corrigés	398
8	Problèmes mixtes - Méthode de séparation des variables	413
8.1	Problème mixte pour l'équation de la chaleur	413
8.1.1	Position du problème	413
8.1.2	Étude de l'unicité de la solution	414
8.1.3	Réduction à des conditions aux limites homogènes	415
8.1.4	Séparation des variables	415
8.1.5	Superposition de solutions élémentaires	417
8.2	Corde vibrante fixée aux extrémités	420
8.2.1	Séparation des variables.	421
8.2.2	Superposition des solutions élémentaires	421
8.3	Équation de Schrödinger	426
8.3.1	Séparation de la variable t	426
8.3.2	Solutions stationnaires pour l'oscillateur harmonique	427
8.3.3	Le problème de Cauchy pour l'oscillateur harmonique	430
8.4	Équation des membranes vibrantes	432
8.4.1	Séparation des variables	433
8.4.2	Équation et fonctions de Bessel	435
8.4.3	Solution du problème de Sturm-Liouville-Bessel	439
8.4.4	Orthogonalité des fonctions de Bessel	440
8.4.5	Superposition de solutions élémentaires	443
8.5	Exercices corrigés	446
9	EDP elliptiques	455
9.1	Généralités	455
9.1.1	Fonctions harmoniques	455
9.1.2	Problème de Cauchy versus problème de Dirichlet	456
9.1.3	Principe du maximum pour les EDP elliptiques	457
9.1.4	Le problème de Dirichlet sur un ouvert borné	460
9.2	Fonctions harmoniques en dimension 2	463
9.2.1	Lien avec les fonctions holomorphes	463
9.2.2	Application au problème de Dirichlet pour le disque	465
9.3	Fonctions harmoniques en dimension 3	469
9.3.1	Séparation des variables r, θ, φ	469
9.3.2	Problème de Legendre d'ordre 0 : polynômes de Legendre	471
9.3.3	Problème de Legendre d'ordre m : fonctions de Legendre	476
9.3.4	Harmoniques sphériques - Partie radiale	480
9.3.5	Problème de Dirichlet pour la boule	481
9.4	L'atome d'hydrogène	482

9.4.1	Équation de Schrödinger à potentiel radial	482
9.4.2	Cas du potentiel coulombien	484
9.5	Exercices corrigés	491
A	Calcul différentiel	499
A.1	Différentiabilité	499
A.1.1	Différentielle en un point	499
A.1.2	Cas particuliers fondamentaux	500
A.1.3	Propriétés de la différentiabilité	501
A.1.4	Dérivée suivant un vecteur	501
A.1.5	Dérivées partielles	502
A.1.6	Lien entre différentielle et dérivées partielles	503
A.1.7	Notion de gradient	504
A.1.8	Matrice jacobienne	505
A.1.9	Dérivées partielles d'une fonction composée	505
A.2	Fonctions de classe \mathcal{C}^k	506
A.2.1	\mathcal{C}^1 implique différentiable	506
A.2.2	Dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 2	507
A.2.3	Théorème des fonctions implicites	508
A.2.4	Difféomorphismes	510
A.3	Arcs paramétrés	511
B	Distributions et transformation de Fourier sur \mathbb{R}^n	515
B.1	T.F. et convolution dans $L^1(\mathbb{R}^n)$	515
B.2	Distributions sur \mathbb{R}^n	516
B.2.1	Définition et exemples élémentaires	516
B.2.2	Opérations élémentaires sur les distributions	517
B.2.3	Produit par une fonction \mathcal{C}^∞ et dérivées partielles	517
B.2.4	Produit tensoriel	517
B.2.5	Support des distributions	519
B.2.6	Produit de convolution	519
B.2.7	Transformée de Fourier	519
B.2.8	Formule de Green et formule des sauts en dimension n	521
	Bibliographie	523
	Index	525