

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

SPÉCIALITÉ

MATHÉMATIQUES

1^{re}

Jean Wacksmann

Pour aller plus loin
en démontrant et en s'entraînant

2^e édition

**NOUVEAUX
PROGRAMMES**

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2}} \geq \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

ellipses

Table des matières

1	Second degré	1
1.1	Résolution d'une équation du second degré	2
1.2	Résolution d'une inéquation du second degré	8
1.3	Somme et produit des racines	10
1.4	Équations et inéquations irrationnelles	12
1.5	Équations d'un cercle	15
1.6	Exercices corrigés	18
1.6.1	Exemples de résolution	18
1.6.2	Signe d'un trinôme	25
1.6.3	Somme et produit des racines	28
1.6.4	Le second degré et la géométrie	31
1.6.5	Exemples d'équations et inéquations irrationnelles	38
1.6.6	Exercices divers	41
2	Polynômes	51
2.1	Définition d'un polynôme	51
2.2	Identification d'un polynôme	52
2.3	Une factorisation remarquable	54
2.4	Divisibilité	56
2.5	Exercices corrigés	59
2.5.1	Équations polynomiales	59
2.5.2	Divisibilité	68
3	Fonctions	75
3.1	Egalité de deux fonctions	75
3.2	Multiplication d'un réel par une fonction	76
3.3	Addition de deux fonctions	77

3.4	Multiplication de deux fonctions	78
3.5	Inverse, quotient	79
3.6	Composition de deux fonctions	80
3.7	La fonction valeur absolue	83
3.7.1	Définition - Premières propriétés	83
3.7.2	Représentation graphique de $f : x \mapsto x - a $	85
3.7.3	Équation $ x = r$	86
3.7.4	Inéquations $ x \leq r, x < r, x \geq r, x > r$	90
3.7.5	Action de la valeur absolue sur la multiplication, sur l'inverse et sur le quotient	92
3.7.6	Action de la valeur absolue sur l'addition - Inégalité triangulaire	93
3.8	Exercices corrigés	95
3.8.1	Sens de variations et opérations	95
3.8.2	Exercices sur la composition	98
3.8.3	Exercices sur la valeur absolue	111
3.8.4	Fonctions et inégalités	121
4	Limite d'une fonction	135
4.1	Limite nulle en 0	136
4.2	Limite finie en 0	136
4.3	Limite finie en un point	137
4.4	Opérations sur les limites	140
4.5	Limite à droite, à gauche	142
4.6	Limite finie et inégalités	144
4.7	Limite de la composée de deux fonctions	147
4.8	Exercices corrigés	148
5	Dérivation	159
5.1	Dérivabilité en un point	160
5.2	Tangente en un point d'une courbe	162
5.3	Fonction dérivée	165
5.3.1	Définition d'une fonction dérivée	165
5.3.2	Dérivées de fonctions usuelles	166
5.3.3	Tableau des dérivées de fonctions usuelles	171
5.4	Opérations sur les dérivées	172

5.4.1	Dérivée d'une somme	172
5.4.2	Dérivée d'un produit	173
5.4.3	Dérivée du produit d'un réel par une fonction	174
5.4.4	Dérivée de l'inverse d'une fonction	174
5.4.5	Dérivée du quotient de deux fonctions	176
5.4.6	Tableau récapitulatif des opérations sur les dérivées . . .	178
5.4.7	Dérivée de la composée avec une fonction affine	178
5.5	Approximation affine tangente	181
5.6	Applications de la dérivation	184
5.6.1	Dérivée et variations d'une fonction	184
5.6.2	Dérivée et extremum	189
5.7	Exercices corrigés	193
5.7.1	Dérivabilité en un point	193
5.7.2	Tangente	202
5.7.3	Opérations sur les dérivées : compléments	211
5.7.4	Application affine tangente	216
5.7.5	Applications de la dérivation	221
6	Suites	243
6.1	Généralités sur les suites	244
6.1.1	Les définitions	244
6.1.2	Différentes modalités pour définir une suite	245
6.2	Propriétés qualitatives d'une suite	249
6.2.1	Sens de variation d'une suite	249
6.2.2	Suite majorée, minorée, bornée	253
6.2.3	Suite périodique	254
6.3	Suite arithmétique	255
6.3.1	Définition - Exemples	255
6.3.2	Propriétés d'une suite arithmétique	257
6.3.3	Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique	259
6.4	Suite géométrique	263
6.4.1	Définition - Exemples	263
6.4.2	Propriétés d'une suite géométrique	265
6.4.3	Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique	267
6.5	Suites convergentes	270
6.5.1	Un exemple introductif	270

6.5.2	Définitions d'une suite convergente	272
6.5.3	Unicité - Opérations sur les limites	274
6.5.4	Suites convergentes et inégalités	277
6.6	Suites divergentes vers l'infini	279
6.6.1	Un exemple introductif	279
6.6.2	Les définitions	281
6.6.3	Opérations sur les suites de limite finie ou infinie	282
6.6.4	Limites infinies et inégalités	285
6.7	Limite d'une suite géométrique	286
6.7.1	Limite de q^n	286
6.7.2	Limite de la somme des termes d'une suite géométrique	289
6.8	Exercices corrigés	291
6.8.1	Propriétés qualitatives d'une suite	291
6.8.2	Suites arithmétiques - Suites géométriques	300
6.8.3	Limite d'une suite	315
7	La fonction exponentielle	343
7.1	Définition de la fonction exponentielle	344
7.1.1	Existence et unicité	344
7.1.2	La définition - Les premières propriétés	346
7.2	Propriétés algébriques	347
7.2.1	Action sur l'addition des réels	347
7.2.2	Action sur l'opposé, sur la soustraction	348
7.2.3	Action sur le produit nx avec $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$	350
7.2.4	Composée de la fonction racine carrée avec exp	351
7.3	La notation exponentielle	352
7.3.1	Le nombre e	352
7.3.2	La fonction $x \mapsto e^x$	352
7.3.3	Variation de exp	354
7.4	Dérivation et fonction exponentielle	356
7.4.1	Dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$	356
7.4.2	Dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$	357
7.5	Exercices corrigés	359
8	Trigonométrie	385
8.1	Le radian	386

8.1.1	Longueur d'un arc de cercle	386
8.1.2	Le radian : une unité d'angle	387
8.2	Repérage sur le cercle trigonométrique	389
8.2.1	Le cercle trigonométrique	389
8.2.2	Repérage sur ce cercle	390
8.2.3	Repérage dans le premier quadrant	391
8.3	Angle orienté	393
8.3.1	Angle orienté de deux vecteurs unitaires	393
8.3.2	Angle orienté de deux vecteurs non nuls	396
8.3.3	Propriétés de calcul avec les angles orientés	396
8.3.4	Orientation du plan	399
8.3.5	Angle orienté et vecteurs colinéaires	401
8.4	Cosinus et sinus d'un nombre réel	405
8.4.1	Les définitions du cosinus et du sinus	405
8.4.2	Premières formules de trigonométrie	406
8.4.3	Cosinus et sinus d'un angle orienté	411
8.4.4	Cosinus et sinus de réels associés à x	412
8.4.5	Lien avec la trigonométrie dans un triangle rectangle . .	414
8.5	Fonction tangente	415
8.6	Équations trigonométriques	418
8.6.1	Équation de la forme $\cos x = a$, où a est un réel donné .	418
8.6.2	Équation de la forme $\sin x = a$, où a est un réel donné .	421
8.6.3	Équation de la forme $\tan x = a$, où a est un réel donné .	424
8.7	Exercices corrigés	428
8.7.1	Quelques exercices généraux	428
8.7.2	Angles orientés	437
8.7.3	Équations - Inéquations trigonométriques	443
9	Produit scalaire	453
9.1	Définition du produit scalaire	454
9.1.1	Introduction	454
9.1.2	Les définitions	455
9.1.3	Expression analytique du produit scalaire	456
9.1.4	Vecteurs orthogonaux	457
9.2	Propriétés du produit scalaire	459
9.2.1	Règles de calculs	459

9.2.2	Identités remarquables et produit scalaire	461
9.2.3	Produit scalaire et vecteurs colinéaires	461
9.3	Produit scalaire et projeté orthogonal	463
9.3.1	Projeté orthogonal sur une droite	463
9.3.2	Projeté orthogonal d'un vecteur	466
9.4	Produit scalaire et angle	469
9.5	Applications du produit scalaire	470
9.5.1	Vecteur normal à une droite	470
9.5.2	Réduction de $MA^2 + MB^2$	474
9.5.3	Produit scalaire et cercle	476
9.5.4	Réduction de $MA^2 - MB^2$	479
9.5.5	Formules d'Al-Kashi	481
9.5.6	Distance d'un point à une droite	483
9.6	Exercices corrigés	485

10 Fonctions trigonométriques **523**

10.1	Propriétés qualitatives	523
10.1.1	Parité	523
10.1.2	Sens de variations	525
10.1.3	Représentations graphiques	526
10.1.4	Fonctions périodiques	526
10.2	Les formules d'addition - de duplication	528
10.2.1	Formules d'addition	528
10.2.2	Formules de duplication	531
10.3	Dérivation des fonctions trigonométriques	532
10.3.1	Dérivées en 0 de sin et cos	532
10.3.2	Dérivées de sin et cos	534
10.3.3	Dérivée de la fonction tangente	536
10.3.4	Dérivée de la composée avec une fonction affine	537
10.4	Exercices corrigés	538
10.4.1	Fonctions périodiques	538
10.4.2	Calculs trigonométriques	541
10.4.3	Calculs de limites	559
10.4.4	Applications de la dérivation de sin et cos	563

11	Probabilités	581
11.1	Probabilités conditionnelles	582
11.1.1	Un exemple introductif	582
11.1.2	Définition d'une probabilité conditionnelle	583
11.1.3	Propriétés	584
11.2	Probabilités totales	586
11.2.1	Un exemple introductif	586
11.2.2	Probabilités totales pour une partition $\{B, \overline{B}\}$	588
11.2.3	Probabilités totales : cas général	590
11.2.4	Indépendance	592
11.3	Variables aléatoires finies	595
11.3.1	Un exemple introductif	595
11.3.2	Les définitions	597
11.3.3	Loi d'une variable aléatoire	599
11.3.4	Trois variables aléatoires finies de référence	599
11.3.5	Espérance d'une variable aléatoire	600
11.3.6	Variance d'une variable aléatoire	603
11.4	Exercices corrigés	608
11.4.1	Probabilités conditionnelles - Indépendance	608
11.4.2	Variables aléatoires	632
11.4.3	Fonctions indicatrices	653
12	Annexe : Ensembles - Logique	657
12.1	Notions sur les ensembles	658
12.1.1	Des exemples rencontrés en Seconde	658
12.1.2	Plus généralement	659
12.1.3	Relation d'appartenance - Relation d'inclusion	659
12.1.4	Egalité ensembliste	660
12.2	Opérations ensemblistes	662
12.2.1	Intersection	662
12.2.2	Union	663
12.2.3	Distributivité	664
12.2.4	Complémentaire	664
12.3	Proposition - Connecteurs logiques	665
12.3.1	Proposition	665
12.3.2	Négation	665

12.3.3	Le connecteur "et"	666
12.3.4	Le connecteur "ou"	666
12.3.5	Le connecteur "implication"	667
12.3.6	Réciproque	669
12.3.7	Equivalence	670
12.3.8	Négation des connecteurs <i>non</i> , \wedge , \vee , \Rightarrow	671
12.4	Quantificateurs	673
12.4.1	Quantificateur universel	673
12.4.2	Quantificateur existentiel	674
12.4.3	Négation et quantificateurs	674
12.5	Quelques méthodes usuelles de démonstration	676
12.5.1	Raisonnement par l'absurde	676
12.5.2	Raisonnement par contraposition	676
12.5.3	Preuve par un contre-exemple	677
12.5.4	Raisonnement par disjonction	677
12.5.5	Raisonnement par récurrence	678