

Sabin Lessard

Les rudiments du calcul stochastique

Cours et exercices corrigés



Table des matières

1 Rappels sur la théorie des probabilités	1
1.1. Introduction	1
1.2. Espace de probabilité.....	1
1.3. Espace de mesure.....	2
1.4. Variable aléatoire	5
1.5. Vecteur aléatoire.....	7
1.6. Événements indépendants.....	8
1.7. Variables aléatoires indépendantes	9
1.8. Variables aléatoires gaussiennes indépendantes.....	10
1.9. Espérance d'une variable aléatoire	10
1.10. Intégrale d'une fonction mesurable	12
1.11. Espérance d'une fonction de variables aléatoires.....	12
1.12. Espaces \mathbb{L}^p	15
1.13. Inégalités	16
1.14. Modes de convergence.....	17
1.15. Théorèmes limites	19
1.16. Espérance conditionnelle.....	20
1.17. Martingales à temps discret.....	22
Exercices du chapitre 1.....	25
2 Mouvement brownien	29
2.1. Introduction.....	29
2.2. Mouvement brownien standard	30
2.3. Mouvement brownien arrêté	33
2.4. Applications du mouvement brownien arrêté.....	36
2.5. Trajectoires du mouvement brownien.....	38
2.6. Variation du mouvement brownien.....	40
2.7. Construction de Donsker	43
2.8. Construction de Lévy	45
Exercices du chapitre 2.....	48

3	Intégrale stochastique	53
3.1.	Introduction.....	53
3.2.	Intégrale déterministe d'une fonction continue.....	54
3.3.	Intégrale déterministe du mouvement brownien.....	55
3.4.	Intégrale stochastique d'une fonction continue.....	57
3.5.	Intégrale stochastique du mouvement brownien.....	59
3.6.	Intégrale d'Itô d'un processus en escalier.....	60
3.7.	Intégrale d'Itô générale.....	65
3.8.	Extension de l'intégrale d'Itô.....	74
3.9.	Formule d'Itô.....	75
3.10.	Première extension de la formule d'Itô.....	76
3.11.	Deuxième extension de la formule d'Itô.....	77
3.12.	Formule d'Itô multidimensionnelle.....	78
3.13.	Règle du produit d'Itô.....	79
3.14.	Intégrale de Stratonovich.....	80
3.15.	Démonstration de la formule d'Itô (facultatif).....	81
	Exercices du chapitre 3.....	84
4	Équations différentielles stochastiques	89
4.1.	Introduction.....	89
4.2.	Équations différentielles déterministes.....	90
4.3.	Équations différentielles stochastiques.....	91
4.4.	Mouvement brownien géométrique.....	91
4.5.	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck.....	92
4.6.	Pont brownien.....	93
4.7.	Équation différentielle stochastique linéaire.....	94
4.7.1.	Bruit additif.....	94
4.7.2.	Bruit multiplicatif.....	95
4.7.3.	Équation linéaire générale.....	95
4.7.4.	Premier et deuxième moments de la solution.....	96
4.8.	Équations différentielles de Stratonovich.....	97
4.9.	Approximation numérique (facultatif).....	99
	Exercices du chapitre 4.....	100
5	Applications du calcul stochastique	103
5.1.	Introduction.....	103
5.2.	Formule de Black-Scholes.....	104
5.3.	Changement de mesure.....	107
5.4.	Formule de Black-Scholes par changement de mesure.....	109
5.5.	Formule de Feynman-Kac.....	111
5.6.	Problème de Dirichlet.....	112

5.7. Théorème de Girsanov élémentaire	114
5.8. Théorème de Girsanov général (facultatif).....	116
Exercices du chapitre 5.....	120
Corrigés des exercices	121
Exercices du chapitre 1.....	121
Exercices du chapitre 2.....	126
Exercices du chapitre 3.....	132
Exercices du chapitre 4.....	141
Exercices du chapitre 5.....	146
Bibliographie	151
Index	153