Chapitre 1

Espaces topologiques

Ce chapitre a pour but d'introduire les notions générales dans un cadre abstrait et de donner les premiers exemples. Il ne présente aucune difficulté, mais toutes les définitions et propriétés doivent être parfaitement connues. Deux cas particuliers importants d'espaces topologiques seront étudiés en détail dans la suite : les espaces métriques dans le chapitre 5 et les espaces vectoriels normés, qui sont des espaces métriques particuliers, dans le chapitre 7. Après avoir donné les premières définitions, nous introduisons dans ce chapitre et dans les deux suivants les notions que l'on peut définir à partir d'une topologie, sans avoir besoin d'outils supplémentaires.

I. Topologies, notions ensemblistes associées

Ce paragraphe définit la structure d'espace topologique, obtenue en adjoignant à un ensemble E donné un ensemble de parties de E vérifiant des propriétés naturelles.

I.1. Définitions et exemples

Définition 1.1. (Topologie, ouvert). *Une topologie sur un ensemble* E *est une partie* $\mathscr{T}$ *de* $\mathscr{P}(\mathsf{E})$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*
1. $\varnothing \in \mathscr{T}$, $\mathsf{E} \in \mathscr{T}$.
2. L'intersection de deux éléments de $\mathscr{T}$ *est un élément de* $\mathscr{T}$.
3. La réunion (finie ou infinie) d'une famille d'éléments de $\mathscr{T}$ *est un élément de* $\mathscr{T}$.
Un espace topologique est un couple $(\mathsf{E}, \mathscr{T})$ *où* E *est un ensemble et* $\mathscr{T}$ *une topologie sur* E.
Les éléments de $\mathscr{T}$ *sont appelés les ouverts, ou les parties ouvertes, de* E.

Exemple 1.2.
1. Sur un ensemble E, il existe toujours deux topologies « extrêmes » : la topologie discrète $\mathscr{T}_{\mathrm{d}} = \mathscr{P}(\mathsf{E})$ et la topologie grossière $\mathscr{T}_{\mathrm{g}} = \{\varnothing, \mathsf{E}\}$. Un espace muni de la topologie discrète (respectivement grossière) est dit discret (respectivement grossier).
2. Un ensemble à deux éléments $\mathsf{E} = \{a, b\}$ peut être muni de quatre topologies différentes :

$$\mathscr{T}_{\mathrm{g}} = \{\varnothing, \mathsf{E}\}, \quad \mathscr{T}_1 = \{\varnothing, \{a\}, \mathsf{E}\}, \quad \mathscr{T}_2 = \{\varnothing, \{b\}, \mathsf{E}\}, \quad \mathscr{T}_{\mathrm{d}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \mathsf{E}\}.$$

3. Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble formé de $\varnothing, \mathbb{R}$ et des intervalles de la forme $]a, b[$, n'est pas une topologie, car la propriété 3 n'est pas vérifiée. En revanche, l'ensemble formé de $\varnothing, \mathbb{R}$ et des réunions quelconques d'intervalles de la forme $]a, b[$ est bien une topologie sur $\mathbb{R}$. Sauf mention contraire, $\mathbb{R}$ sera toujours muni de cette topologie $\mathscr{T}_u$ appelée topologie usuelle. Nous verrons dans l'exemple 1.17 que c'est la topologie associée à la relation d'ordre total.

Définition 1.3. (Fermé). *Un fermé (ou une partie fermée) de* $(\mathsf{E}, \mathscr{T})$ *est une partie de* E *dont le complémentaire dans* E *est un ouvert de* $(\mathsf{E}, \mathscr{T})$.

Exemple 1.4.
1. Pour la topologie grossière, les fermés sont $\varnothing$ et E. Pour la topologie discrète, toute partie de E est à la fois ouverte et fermée.
2. Avec les notations de l'exemple 1.2, les fermés de $\mathscr{T}_1$ sont les éléments de $\mathscr{T}_2$ et inversement.
3. Sur $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$, les fermés sont $\mathbb{R}, \varnothing$ et les réunions d'intervalles $[a, b]$. En particulier, les singletons sont fermés.

Attention — Être ou ne pas être ouvert ou fermé ?

Une erreur grossière mais malheureusement fréquente est de dire qu'une partie est fermée car elle n'est pas ouverte, ou réciproquement. C'est faux : tous les cas sont possibles ! Toute partie d'un espace discret est à la fois ouverte et fermée. Sur $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$, $]0, 1[$ est ouvert et non fermé ; $[0, 1]$ est fermé et non ouvert et $]0, 1]$ n'est ni ouvert, ni fermé. Dans un espace topologique $(E, \mathscr{T})$ quelconque, E est à la fois ouvert et fermé.

Remarque. Une topologie peut aussi être définie par l'intermédiaire de ses fermés. En effet, on vérifie facilement que, pour qu'une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(E)$ soit l'ensemble des fermés d'une topologie, il faut et il suffit qu'elle vérifie les conditions suivantes :
1. $\varnothing \in \mathscr{F}$, $E \in \mathscr{F}$.
2. L'intersection (finie ou infinie) d'une famille d'éléments de $\mathscr{F}$ est un élément de $\mathscr{F}$.
3. La réunion de deux éléments de $\mathscr{F}$ est un élément de $\mathscr{F}$.

La topologie, c'est-à-dire l'ensemble des ouverts, est alors l'ensemble des complémentaires des éléments de $\mathscr{F}$.

Attention — Intersections d'ouverts et réunions de fermés

Par définition, les ouverts sont stables par réunion quelconque et par intersection finie. Les fermés sont stables par intersection quelconque et par réunion finie. Cependant, une intersection quelconque d'ouverts n'est pas toujours ouverte et une réunion quelconque de fermés n'est pas toujours fermée. Pour s'en convaincre, on retiendra les deux exemples suivants sur $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$:

$$\cap_{n \in \mathbb{N}} \,]-1/n; 1/n[\,= \{0\} \qquad \text{et} \qquad \cup_{n \in \mathbb{N}} [1/n, 1] =]0, 1].$$

Comme pour les structures algébriques, il est naturel de se demander si une topologie sur un ensemble E permet de définir sans ambiguïté une topologie sur une partie de E. La proposition suivante montre que la réponse est positive pour toute partie d'un espace topologique. Il est à noter que, dans le cas algébrique, ce n'est pas toujours le cas : par exemple, toute partie d'un groupe n'est pas nécessairement un sous-groupe.

Définition 1.5. (Topologie induite). *Soient $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique et A une partie de E. On vérifie immédiatement que l'ensemble*

$$\mathscr{T}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathscr{T}\}$$

est une topologie sur A. On l'appelle topologie induite sur A par $\mathscr{T}$. Lorsque aucune précision n'est donnée, on considère toujours qu'une partie d'un espace topologique $(E, \mathscr{T})$ est munie de la topologie induite par $\mathscr{T}$.

Remarque. Les ouverts de la topologie induite sur A par la topologie de E sont donc les intersections des ouverts de E avec A. Par passage au complémentaire, on vérifie facilement que les fermés de A sont aussi les intersections des fermés de E avec A.

Exemple 1.6. L'intervalle $[0,1[$ est un ouvert de $[0,2]$ muni de la topologie induite par $\mathscr{T}_u$, car $[0,1[=]-1,1[\cap [0,2]$ et $]-1,1[\in \mathscr{T}_u$. Noter que $[0,1[$ est aussi un fermé de $[-1,1[$ muni de la topologie induite par $\mathscr{T}_u$ car $[0,1[= [0,4] \cap [-1,1[$ avec $[0,4]$ fermé de $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$. En revanche, $[0,1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$.

Attention

L'exemple 1.6 montre que, lorsqu'on utilise les adjectifs ouvert et fermé, il faut toujours préciser l'espace topologique de référence. Toutefois, lorsqu'il n'y a qu'un seul espace de référence possible, et donc aucune ambiguïté, on se permettra de ne pas le préciser.

Définition 1.7. (Partie discrète). *Une partie A de E est dite discrète lorsque la topologie induite sur A est la topologie discrète, c'est-à-dire lorsque $\mathscr{T}_A = \mathscr{P}(A)$.*

Il est naturel de comparer deux topologies données sur un même ensemble.

Définition 1.8. (Topologie plus ou moins fine). *Soient E un ensemble, $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ deux topologies sur E. La topologie $\mathscr{T}$ est dite plus fine que $\mathscr{T}'$ lorsque $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$ et moins fine que $\mathscr{T}'$ lorsque $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$.*

Remarque. On prendra d'une part garde au caractère apparemment contradictoire de ces termes : la topologie la plus fine est la plus grosse du point de vue de l'inclusion, mais elle décrit plus finement les propriétés de l'espace considéré, puisqu'elle a plus d'ouverts. D'autre part, il est important de noter que la relation d'ordre « être plus fine que » n'est pas totale. Par exemple, avec les notations de l'exemple 1.2, $\mathscr{T}_1$ n'est ni plus fine, ni moins fine que $\mathscr{T}_2$.

Exemple 1.9. La topologie discrète est la topologie la plus fine que l'on peut définir sur un ensemble ; la topologie grossière est la topologie la moins fine.

La proposition suivante montre qu'une application peut transporter une structure topologique de son ensemble d'arrivée à son ensemble de départ.

Proposition 1.10. *Soient E un ensemble non vide, $(E', \mathscr{T}')$ un espace topologique et f une application de E dans E'. L'ensemble $\mathscr{T} = \{f^{-1}(O') \mid O' \in \mathscr{T}'\}$ est une topologie sur E, appelée l'image réciproque de $\mathscr{T}'$ par f. On la note $f^{-1}(\mathscr{T}')$.*

Preuve. La preuve est immédiate grâce aux propriétés de stabilité de la réunion et de l'intersection par image inverse. ■

Test 1.1.

Montrer que A est discrète si et seulement si tout singleton de A est ouvert dans A.

Test 1.2.

L'image directe d'une topologie par une application est-elle une topologie ?

I.2. Bases de topologie

Dans les situations concrètes, les topologies sont souvent définies à partir d'autres structures déjà présentes (par exemple, une distance sur un espace métrique). Ce paragraphe formalise ce type de construction.

Proposition 1.11. *Soient* E *un ensemble non vide et* T *un ensemble non vide de topologies sur* E*. L'intersection des éléments de* T *est une topologie sur* E*. De plus, pour toute partie* $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\mathsf{E})$*, on définit* $\mathsf{T}(\mathscr{A})$ *comme l'ensemble des topologies qui contiennent* $\mathscr{A}$*. On conclut alors que* $\mathsf{T}(\mathscr{A})$ *possède un plus petit élément qui est l'intersection des éléments de* $\mathsf{T}(\mathscr{A})$*.*

Preuve. Soit $\mathscr{T}$ l'intersection des éléments de T. Comme $\varnothing$ et E sont dans chaque élément de T, ils sont aussi dans $\mathscr{T}$. Si $(\mathsf{O}_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{T}$, chacun des O_i est dans chaque topologie de T, donc la réunion $\mathsf{O} = \cup_{i\in I}\mathsf{O}_i$ est aussi dans chaque topologie de T, donc $\mathsf{O} \in \mathscr{T}$. Si O_1 et O_2 sont des éléments de $\mathscr{T}$, ils appartiennent à chaque topologie de T, donc leur intersection appartient aussi à chaque topologie de T, donc à $\mathscr{T}$. Les propriétés de la définition 1.1 sont donc vérifiées, $\mathscr{T}$ est une topologie sur E. L'ensemble $\mathsf{T}(\mathscr{A})$ est non vide, puisqu'il contient la topologie discrète $\mathscr{P}(\mathsf{E})$. L'intersection $\mathscr{T}$ des éléments de $\mathsf{T}(\mathscr{A})$ est donc une topologie sur E et elle contient $\mathscr{A}$, donc $\mathscr{T} \in \mathsf{T}(\mathscr{A})$. Il est clair que $\mathscr{T}$ est le plus petit élément de $\mathsf{T}(\mathscr{A})$. ■

Définition 1.12. (Topologie engendrée). *Soient* E *un ensemble et* $\mathscr{A}$ *un ensemble de parties de* E*. L'intersection de toutes les topologies qui contiennent* $\mathscr{A}$ *est appelée topologie engendrée par* $\mathscr{A}$*. C'est la topologie la moins fine sur* E *qui contient l'ensemble de parties* $\mathscr{A}$*.*

En général, la description des éléments d'une topologie engendrée par un ensemble de parties $\mathscr{A}$ à partir des éléments de $\mathscr{A}$ est peu commode. On introduit pour cette raison la notion suivante.

Définition 1.13. (Base de topologie). *Soit* E *un ensemble. Une base de topologie sur* E *est un ensemble de parties de* E *noté* $\mathscr{B}$ *tel que*
1. la réunion des éléments de $\mathscr{B}$ *est égale à* E *;*
2. l'intersection de deux éléments de $\mathscr{B}$ *est une réunion d'éléments de* $\mathscr{B}$*.*
Si $\mathscr{B}$ *est une base de topologie sur* E *qui engendre une topologie* $\mathscr{T}$*, on dit que* $\mathscr{B}$ *est une base de topologie pour* $\mathscr{T}$*.*

Notons qu'on peut toujours supposer que les éléments d'une base de topologie $\mathscr{B}$ sont non vides, puisque, si $\mathscr{B}$ contient $\varnothing$, la partie $\mathscr{B}\backslash\{\varnothing\}$ est encore une base de topologie. Rappelons que, par convention, la réunion de la famille vide de parties de E (c'est-à-dire la famille indexée par $\varnothing$) est l'ensemble vide. La topologie engendrée par $\mathscr{B}$ a une description particulièrement simple et utile.

Proposition 1.14. *Soient* E *un ensemble,* O *une partie de* E*,* $\mathscr{B}$ *une base de topologie sur* E *et* $\mathscr{T}$ *la topologie engendrée par* $\mathscr{B}$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. $\mathsf{O} \in \mathscr{T}$*.*
2. Il existe une famille $(\mathsf{O}_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* $\mathscr{B}$ *telle que* $\mathsf{O} = \cup_{i\in I}\mathsf{O}_i$*.*
3. Pour tout $x \in \mathsf{O}$*, il existe* $\mathsf{A} \in \mathscr{B}$ *tel que* $x \in \mathsf{A} \subset \mathsf{O}$*.*

Preuve.
Montrons que l'assertion 2 entraîne la 3 : comme $\mathsf{O} = \cup_{i\in I}\mathsf{O}_i$, pour tout $x \in \mathsf{O}$, il existe $i \in I$ tel que $x \in \mathsf{O}_i \subset \mathsf{O}$.
Réciproquement, comme pour tout $x \in \mathsf{O}$, il existe $\mathsf{O}_x \in \mathscr{B}$ telle que $x \in \mathsf{O}_x \subset \mathsf{O}$, on a $\mathsf{O} \supset \cup_{x\in \mathsf{O}}\mathsf{O}_x$. L'inclusion réciproque étant évidente, on a bien $\mathsf{O} = \cup_{x\in\mathsf{O}}\mathsf{O}_x$.

On a immédiatement que l'assertion 2 entraîne l'assertion 1 car $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$.
Réciproquement, montrons que l'assertion 1 entraîne la 2.
Étape 1. Montrons tout d'abord que l'ensemble $\mathscr{E}$ des éléments s'écrivant comme réunion d'éléments de $\mathscr{B}$ est une topologie sur E. Par convention, $\varnothing \in \mathscr{E}$ (c'est la réunion de la famille vide). Comme E est la réunion de tous les éléments de $\mathscr{B}$, $E \in \mathscr{E}$. Par associativité de la réunion, la réunion d'une famille d'éléments de $\mathscr{E}$ est un élément de $\mathscr{E}$. Soient maintenant O_1 et O_2 dans $\mathscr{E}$ et soit $x \in O_1 \cap O_2$. Comme l'assertion 2 implique la 3, il existe deux éléments B_1 et B_2 de $\mathscr{B}$ tels que $x \in B_1 \subset O_1$ et $x \in B_2 \subset O_2$. En particulier $x \in B_1 \cap B_2$ et il existe une partie C de $\mathscr{B}$ qui vérifie $x \in C \subset B_1 \cap B_2$, donc aussi $x \in C \subset O_1 \cap O_2$, ce qui prouve que $O_1 \cap O_2$ est dans $\mathscr{E}$. La partie $\mathscr{E}$ est donc bien une topologie sur E.
Étape 2. Soit maintenant $O \in \mathscr{T}$. Comme $\mathscr{T}$ est la topologie la plus petite au sens de l'inclusion qui contient $\mathscr{B}$ et comme $\mathscr{E}$ est une topologie qui contient $\mathscr{B}$, on en déduit que $\mathscr{T} \subset \mathscr{E}$ et donc que O s'écrit comme réunion d'éléments de $\mathscr{B}$. ■

Exemple 1.15. L'ensemble $\mathscr{B} = \{[a, b[; (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b\} \cup \varnothing$ est une base de topologie sur $\mathbb{R}$ et la topologie engendrée par $\mathscr{B}$ est strictement plus fine que la topologie usuelle $\mathscr{T}_u$. En effet, tout réel a est contenu dans l'élément $[a, a+1[$ de $\mathscr{B}$ et l'intersection de deux éléments de $\mathscr{B}$ est un élément de $\mathscr{B}$, donc $\mathscr{B}$ est une base. Tout intervalle ouvert $]a, b[$ est la réunion d'éléments de $\mathscr{B}$ (à savoir $]a, b[= \cup_{n \geqslant n_0} [a+1/n, b[$, avec n_0 assez grand), donc tout ouvert de $\mathscr{T}_u$ est aussi ouvert de $\mathscr{T}_{\mathscr{B}}$, donc $\mathscr{T}_u \subset \mathscr{T}_{\mathscr{B}}$. Enfin, l'inclusion est stricte car $[a, b[\in \mathscr{T}_{\mathscr{B}}$ n'est pas ouvert pour $\mathscr{T}_u$.

Toute topologie $\mathscr{T}$ sur E possède au moins une base, la partie $\mathscr{T}$ elle-même. La notion n'est bien sûr intéressante que lorsque $\mathscr{B}$ est plus petite que $\mathscr{T}$: comme on le verra, dans de nombreux cas, il est possible de se limiter à des raisonnements sur les éléments d'une base de topologie, au lieu de manipuler la totalité des ouverts. On notera aussi qu'en général il n'y a pas unicité de la base de topologie engendrant une topologie donnée.

Exemple 1.16.(Topologie de l'ordre). Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné ayant au moins deux éléments. Pour $x \in E$, on note

$$(\leftarrow, x[= \{y \in E \mid y < x\}, \qquad]x, \rightarrow) = \{y \in E \mid x < y\},$$

où $x < y$ signifie $x \leqslant y$ et $x \neq y$. La réunion $\mathscr{B}$ des ensembles $\mathscr{B}_1 = \{(\leftarrow, x[, x \in E\} \cup \varnothing$, $\mathscr{B}_2 = \{]x, \rightarrow), x \in E\} \cup \varnothing$ et $\mathscr{B}_3 = \{]x, y[\ , (x, y) \in E^2, x \leqslant y\} \cup \varnothing$ est une base de topologie sur E. Pour le montrer, on fixe $x \in E$. Si x possède un majorant strict b, $x \in (\leftarrow, b[$, sinon x possède un minorant strict a (car E a au moins deux éléments) et dans ce cas $x \in]a, \rightarrow)$. On en déduit la propriété 1. On vérifie immédiatement que l'intersection de deux éléments de $\mathscr{B}$ est un élément de $\mathscr{B}$, ce qui montre la propriété 2. La topologie engendrée par $\mathscr{B}$ est dite topologie de l'ordre sur E.

Exemple 1.17.(Topologies de l'ordre sur $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$). On utilise les notations de l'exemple précédent.
1. Sur la droite réelle $\mathbb{R}$, il suffit de choisir $\mathscr{B} = \mathscr{B}_3$ comme base de topologie, puisque les éléments de $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont des réunions d'éléments de $\mathscr{B}_3$. Les ouverts de $\mathbb{R}$ sont donc les réunions d'intervalles ouverts, on retrouve bien la topologie $\mathscr{T}_u$ présentée dans l'exemple 1.2.
2. On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la droite réelle achevée. Comme $\overline{\mathbb{R}}$ admet un plus petit et un plus grand élément, on considère la base $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cup \mathscr{B}_3$. Les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$ sont les réunions d'ouverts de $\mathbb{R}$ et d'ensembles de la forme $[-\infty, x[$ ou $]y, +\infty]$.
3. En particulier, $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas un fermé de $\overline{\mathbb{R}}$.

Test 1.3.

Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{B}$ une base pour $\mathcal{T}$ et $A \subset E$. Montrer que $\mathcal{B}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{B}\}$ est une base de topologie sur A. Quelle est la topologie engendrée par $\mathcal{B}_A$?

I.3. Un exemple fondamental : la topologie naturelle d'un espace métrique

Les espaces métriques sont un cas particulier très important d'espaces topologiques. Nous étudierons leurs propriétés spécifiques dans le chapitre 5. Jusqu'à ce chapitre, nous les utiliserons souvent comme exemples pour illustrer les définitions abstraites. Ce sont des espaces topologiques avec des propriétés assez intuitives, ou tout du moins qu'on a l'habitude de manipuler car le modèle le plus simple est $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle (voir exemple ci-dessous).

Définition 1.18. (Espace métrique, distance). *Soit* E *un ensemble non vide. Une distance sur* E *est une application* d *de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *qui vérifie, pour tout* $(x, y, z) \in E^3$,
1. $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$ *;*
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *;*
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.
Si d *est une distance sur* E*, le couple* (E, d) *est appelé espace métrique . La propriété 3 est « l'inégalité triangulaire ». Elle entraîne l'inégalité suivante, appelée « deuxième inégalité triangulaire »,*

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leqslant d(x, z).$$

Exemple 1.19.
1. Soit E un ensemble. L'application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $d(x, x) = 0$ et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ est une distance sur E, dite distance discrète.
2. Sur $\mathbb{R}$, la distance usuelle entre deux réels x et y est donnée par $d_{|.|}(x, y) = |x - y|$. Les propriétés 1, 2, 3 sont des conséquences directes de la définition de la valeur absolue. On note souvent $(\mathbb{R}, |.|)$ l'espace métrique $(\mathbb{R}, d_{|.|})$.
Sur $\mathbb{C}$, la distance usuelle se définit de manière analogue au moyen du module noté aussi $|.|$.
3. Sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, on peut définir beaucoup d'autres distances. Par exemple, les applications de la forme $(x, y) \mapsto |f(x) - f(y)|$, où f est injective, sont des distances.
4. Sur $\mathbb{R}^n$, l'application d_∞ définie pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, .., y_n)$ par $d_\infty(x, y) = \max_{i=1..n} |x_i - y_i|$ est une distance. Nous verrons dans la suite d'autres exemples de distances sur $\mathbb{R}^n$.

Sur un espace métrique, la donnée d'une distance permet de définir naturellement une topologie qui est engendrée par des parties particulières de l'espace : les boules.

Définition 1.20. (Boules et sphères). *Soient* (E, d) *un espace métrique,* $a \in E$ *et* $r \in \mathbb{R}^+$.
1. La boule ouverte de centre a *et de rayon* r *est l'ensemble* $B(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\}$.
2. La boule fermée de centre a *et de rayon* r *est l'ensemble* $B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) \leqslant r\}$.
3. La sphère de centre a *et de rayon* r *est l'ensemble* $S(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) = r\}$.

Exemple 1.21. Sur $(\mathbb{R}, |.|)$, la boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}$ et de rayon $r > 0$ est l'intervalle $]a - r, a + r[$.

Pour plus de détails et de propriétés sur les boules et les sphères, on renvoie au chapitre 5. La proposition suivante est à la base de toutes les constructions.

Proposition 1.22. *Sur un espace métrique* (E, d)*, l'ensemble* $\mathcal{B}_O$ *des boules ouvertes est une base de topologie sur* E.

Preuve. Tout point x de E est dans une boule ouverte (par exemple $B(x,1)$), donc la réunion des éléments de $\mathscr{B}_O$ est bien égale à E. Si $B_1 = B(a_1, r_1)$ et $B_2 = B(a_2, r_2)$ sont deux boules ouvertes d'intersection non vide, alors, pour tout $x \in B_1 \cap B_2$, l'inégalité triangulaire montre que si $\varepsilon = \min(r_1 - d(a_1, x), r_2 - d(a_2, x))$, alors la boule $B(x, \varepsilon)$ est contenue dans l'intersection $B_1 \cap B_2$ et $x \in B(x, \varepsilon)$ car $\varepsilon \neq 0$. Cette intersection est donc la réunion de boules ouvertes, ce qui termine la preuve. ■

Définition 1.23. (Topologie naturelle d'un espace métrique). *Soit* (E, d) *un espace métrique. La topologie associée à la distance est la topologie engendrée par la base* $\mathscr{B}_O$. *Les ouverts d'un espace métrique* (E, d) *sont donc les réunions de boules ouvertes. Un espace métrique sera, sauf mention contraire, supposé muni de la topologie associée à la distance.*

Rappelons que, par la proposition 1.14, ceci signifie notamment que tout ouvert de cette topologie contient une boule ouverte et même que tout ouvert contenant x contient une boule ouverte centrée en x. En particulier, les boules ouvertes sont des ouverts de E et on vérifie facilement que les boules fermées sont des fermés de E. Nous verrons au chapitre 5 que les topologies associées à des distances ont des propriétés particulières (de séparation et de dénombrabilité notamment).

Exemple 1.24. Soit E un ensemble. La topologie associée à la distance discrète définie dans l'exemple 1.19 est la topologie discrète sur E.

Synthèse — Topologie usuelle sur $\mathbb{R}$

Sur $(\mathbb{R}, |.|)$, comme les boules ouvertes sont les intervalles ouverts, les ouverts de la topologie associée à la distance $d_{|.|}$ sont les réunions quelconques d'intervalles ouverts. C'est exactement la topologie usuelle $\mathscr{T}_u$ définie dans l'exemple 1.19 et aussi la topologie associée à la relation d'ordre de l'exemple 1.17.

I.4. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie

Dans ce paragraphe, nous revenons au cas général d'un espace topologique $(E, \mathscr{T})$ quelconque. Si A est une partie de E, on considère l'ensemble $\mathscr{O}(A)$ des ouverts contenus dans A. Cet ensemble est non vide, puisqu'il contient $\varnothing$. La réunion O des éléments de $\mathscr{O}(A)$ est un ouvert de E contenu dans A, donc $O \in \mathscr{O}(A)$ et c'est le plus grand élément de $\mathscr{O}(A)$ pour la relation d'ordre « inclusion ». De même, l'ensemble $\mathscr{F}(A)$ des fermés contenant A est non vide puisqu'il contient E. L'intersection des éléments de $\mathscr{F}(A)$ est un fermé de E et c'est le plus petit élément de $\mathscr{F}(A)$ pour la relation d'ordre « inclusion ». On peut donc introduire la terminologie suivante.

Définition 1.25. (Intérieur, adhérence, frontière). *Soient* $(E, \mathscr{T})$ *un espace topologique et* A *une partie de* E.
1. L'intérieur de A *est le plus grand ouvert (pour l'inclusion) contenu dans* A, *on le note* $\mathring{A}$ *ou* $\mathrm{Int}_E A$. *Un point* x *est dit intérieur à* A *lorsque* $x \in \mathring{A}$.
2. L'adhérence de A *est le plus petit fermé (pour l'inclusion) contenant* A, *on la note* $\overline{A}$ *ou* $\mathrm{Adh}_E A$. *Un point* x *est dit adhérent à* A *lorsque* $x \in \overline{A}$.
3. La frontière de A *est le complémentaire de l'intérieur de* A *dans l'adhérence de* A, *on la note* $\mathrm{Fr} A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$. *Un point* x *est dit frontière pour* A *lorsque* $x \in \mathrm{Fr} A$.

Remarque. Noter que, par définition, on a immédiatement les équivalences suivantes :

$$\mathrm{A} \text{ ouvert de } \mathrm{E} \Leftrightarrow \mathrm{Int}_{\mathrm{E}}\mathrm{A} = \mathrm{A} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A} \text{ fermé de } \mathrm{E} \Leftrightarrow \mathrm{Adh}_{\mathrm{E}}\mathrm{A} = \mathrm{A}.$$

EXEMPLE 1.26. Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ est muni de la topologie de l'ordre et si $\mathrm{A} = [0,1[$, on vérifie que $\mathrm{Int}\mathrm{A} =]0,1[$, $\mathrm{Adh}\mathrm{A} = [0,1]$ et $\mathrm{Fr}(\mathrm{A}) = \{0,1\}$.
Dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{Int}\mathbb{Z} = \varnothing$, $\mathrm{Adh}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
Dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathrm{Int}\mathbb{Z} = \varnothing$, $\mathrm{Adh}\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z}) = \overline{\mathbb{Z}}$, $\mathrm{Adh}(\mathbb{R}) = \overline{\mathbb{R}}$.
Dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{Int}\mathbb{Q} = \varnothing$, $\mathrm{Adh}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Fr}\mathbb{Q} = \mathrm{Int}(\mathrm{Fr}\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Test 1.4.

Montrer que $\mathring{\mathring{\mathrm{A}}} = \mathring{\mathrm{A}}$, $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \overline{\mathrm{A}}$. Trouver un exemple pour lequel on a $\overline{\mathring{\mathrm{A}}} \neq \mathring{\overline{\mathrm{A}}}$.

Test 1.5.

Si $\mathscr{T}_1$ est une topologie plus fine que $\mathscr{T}_2$, comparer les adhérences, intérieurs et frontières d'une même partie, relativement à ces deux topologies.

Test 1.6.

Sur $\{0,1\}$ muni de la topologie $\{\{0,1\}, \varnothing, \{0\}\}$, donner l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $\{0\}$ et de $\{1\}$.

Test 1.7.

Quand a-t-on $\mathrm{Fr}\mathrm{A} = \mathrm{A}$?

Proposition 1.27. *Pour toute partie* A *de* E, *on note* $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\mathrm{A})$ *le complémentaire de* A *dans* E, *c'est-à-dire* $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}) = \{x \in \mathrm{E}, x \notin \mathrm{A}\}$. *On a*

$$\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\overline{\mathrm{A}}) = \overset{\circ}{\widehat{\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\mathrm{A})}}, \quad \mathscr{C}_{\mathrm{E}}\left(\mathring{\mathrm{A}}\right) = \overline{\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\mathrm{A})} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fr}\mathrm{A} = \mathrm{Fr}(\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\mathrm{A})).$$

PREUVE. L'ensemble $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\overline{\mathrm{A}})$ est un ouvert contenu dans $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\mathrm{A})$, donc $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\overline{\mathrm{A}}) \subset \overset{\circ}{\widehat{\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\mathrm{A})}}$. L'ensemble $\overset{\circ}{\widehat{\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\mathrm{A})}}$ est un ouvert contenu dans $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\mathrm{A})$, donc son complémentaire B est un fermé contenant A, donc $\overline{\mathrm{A}} \subset \mathrm{B}$, donc $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\mathrm{B}) \subset \mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\overline{\mathrm{A}})$, soit $\overset{\circ}{\widehat{\mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\mathrm{A})}} \subset \mathscr{C}_{\mathrm{E}}(\overline{\mathrm{A}})$. La deuxième égalité se montre de manière analogue. La troisième se déduit des deux premières. ■

La proposition suivante est très utile en pratique.

Proposition 1.28. *Soient* A *une partie de* E *et* $x \in \mathrm{E}$.
1. $x \in \mathring{\mathrm{A}}$ *si et seulement s'il existe un ouvert* O *de* E *tel que* $x \in \mathrm{O} \subset \mathrm{A}$.
2. $x \in \overline{\mathrm{A}}$ *si et seulement si, pour tout ouvert* O *de* E *contenant* x, *l'intersection* $\mathrm{O} \cap \mathrm{A}$ *est non vide.*
3. $x \in \mathrm{Fr}\mathrm{A}$ *si et seulement si, pour tout ouvert* O *de* E *contenant* x, *les intersections* $\mathrm{O} \cap \mathrm{A}$ *et* $\mathrm{O} \cap \mathscr{C}(\mathrm{A})$ *sont non vides.*

PREUVE. La première assertion découle directement du fait que l'intérieur de A est la réunion de tous les ouverts contenus dans A. La deuxième se déduit de la première par passage au complémentaire et la troisième est alors une conséquence directe des deux premières. ■

Dans le cas particulier des espaces métriques, comme les boules ouvertes sont une base pour la topologie de E, les notions d'intérieur et d'adhérence ont une traduction assez maniable.

Corollaire 1.29. *Soient* (E, d) *un espace métrique et* A *une partie de* E.
1. Un point x *est intérieur à* A *si et seulement s'il existe* $r > 0$ *tel que* $B(x, r) \subset A$.
2. Un point x *est adhérent à* A *si et seulement si, pour tout* $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$.

La proposition suivante décrit le comportement de l'adhérence, de l'intérieur et de la frontière par rapport aux opérations de réunion et d'intersections. Il est important de bien la connaître.

Proposition 1.30. *Soient* $(E, \mathscr{T})$ *un espace topologique et* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de parties de* E. *On a*

$$\overset{\circ}{\widehat{\cap_{i\in I} A_i}} \subset \cap_{i\in I} \overset{\circ}{\widehat{A_i}}, \qquad \cup_{i\in I} \overset{\circ}{\widehat{A_i}} \subset \overset{\circ}{\widehat{\cup_{i\in I} A_i}}$$

$$\overline{\cap_{i\in I} A_i} \subset \cap_{i\in I} \overline{A_i}, \qquad \cup_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\cup_{i\in I} A_i}.$$

De plus, si la famille $(A_i)_{i\in I}$ *est finie, alors*

$$\overset{\circ}{\widehat{\cap_{i\in I} A_i}} = \cap_{i\in I} \overset{\circ}{\widehat{A_i}} \qquad \text{et} \qquad \cup_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\cup_{i\in I} A_i}.$$

Preuve.
Étape 1. $\overset{\circ}{\widehat{\cap_{i\in I} A_i}}$ est un ouvert contenu dans $\cap_{i\in I} A_i$, il est donc contenu dans chacun des A_i, donc dans $\overset{\circ}{\widehat{A_i}}$, donc dans l'intersection $\cap_{i\in I} \overset{\circ}{\widehat{A_i}}$.
Étape 2. Pour tout $i \in I$, $\overset{\circ}{\widehat{A_i}}$ est un ouvert inclus dans A_i, donc $\cup_{i\in I} \overset{\circ}{\widehat{A_i}}$ est un ouvert contenu dans $\cup_{i\in I} A_i$ et donc $\cup_{i\in I} \overset{\circ}{\widehat{A_i}} \subset \overset{\circ}{\widehat{\cup_{i\in I} A_i}}$.
Étape 3. Pour tout $i \in I$, $\overline{A_i}$ est un fermé contenant A_i, donc $\cap_{i\in I} A_i \subset \cap_{i\in I} \overline{A_i}$, donc $\overline{\cap_{i\in I} A_i}$ est contenu dans $\cap_{i\in I} \overline{A_i}$.
Étape 4. Pour tout $j \in I$, $A_j \subset \overline{\cup_{i\in I} A_i}$, donc $\overline{A_j} \subset \overline{\cup_{i\in I} A_i}$ et donc $\cup_{j\in I} \overline{A_j} \subset \overline{\cup_{i\in I} A_i}$.
Étape 5. Lorsque I est fini, $\cap_{i\in I} \overset{\circ}{\widehat{A_i}}$ est un ouvert et il est (toujours) contenu dans $\cap_{i\in I} A_i$, donc il est contenu dans $\overset{\circ}{\widehat{\cap_{i\in I} A_i}}$. Comme on a déjà montré que $\overset{\circ}{\widehat{\cap_{i\in I} A_i}} \subset \cap_{i\in I} \overset{\circ}{\widehat{A_i}}$, on en déduit l'égalité $\cap_{i\in I} \overset{\circ}{\widehat{A_i}} = \overset{\circ}{\widehat{\cap_{i\in I} A_i}}$.
Étape 6. Lorsque I est fini, $\cup_{j\in I} \overline{A_j}$ est un fermé, qui contient (toujours) $\cup_{j\in I} A_j$, donc il contient $\overline{\cup_{j\in I} A_j}$. Comme on a déjà montré que $\cup_{j\in I} \overline{A_j} \subset \overline{\cup_{j\in I} A_j}$, on en déduit l'égalité $\cup_{j\in I} \overline{A_j} = \overline{\cup_{j\in I} A_j}$. ∎

Attention

Les notions d'intérieur, d'adhérence et de frontière dépendent de la topologie (c'est normal car les notions d'ouverts et de fermés en dépendent déjà !). Par exemple, soit $A \subset E$. Toute partie B de A peut être considérée comme partie de l'espace topologique initial E, ou comme partie du sous-espace topologique A muni de la topologie induite. Lorsqu'il y a ambiguïté, on précise en indice l'espace topologique de référence : par exemple, $\mathrm{Int}_A(B)$ est l'intérieur de B en tant que partie de A muni de la topologie induite. Ainsi,

$$\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}[0, 1] =]0, 1[\qquad \text{et} \qquad \mathrm{Int}_{[0,2]}[0, 1] = [0, 1[.$$

Proposition 1.31. *Soit* A *une partie de* E *et* $B \subset A$. *On a*

$$\mathrm{Int}_E(B) \cap A \subset \mathrm{Int}_A(B), \quad \mathrm{Adh}_A(B) = \mathrm{Adh}_E(B) \cap A \quad \textit{et} \quad \mathrm{Fr}_A(B) \subset \mathrm{Fr}_E(B) \cap A.$$

Preuve. Par définition de la topologie induite, $\mathrm{Int}_E(B) \cap A$ est un ouvert de A contenu dans B, donc $\mathrm{Int}_E(B) \cap A \subset \mathrm{Int}_A(B)$. L'ensemble $\mathrm{Adh}_E(B) \cap A$ est un fermé de A qui contient B, donc il contient $\mathrm{Adh}_A(B)$. Réciproquement, $\mathrm{Adh}_A(B)$ est un fermé de A, donc il existe un fermé F de E tel que $\mathrm{Adh}_A(B) = F \cap A$ et F contient B car $\mathrm{Adh}_A(B)$ contient B. Donc $\mathrm{Adh}_E(B) \subset F$, donc

$$\mathrm{Adh}_E(B) \cap A \subset F \cap A = \mathrm{Adh}_A(B),$$

ce qui prouve l'égalité pour l'adhérence. L'assertion sur la frontière se déduit directement des deux autres. ■

Test 1.8.

Trouver des exemples pour lesquels les quatre inclusions de la proposition 1.30 sont strictes.

Test 1.9.

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ vérifiant $\overline{A} \cap B = \varnothing$ et $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Montrer que $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$.

Test 1.10.

Est-il possible d'améliorer les deux inclusions de la proposition 1.31 ?

I.5. Voisinages

La donnée d'une topologie sur E conduit à une nouvelle relation binaire sur $\mathscr{P}(E)$, qui raffine l'inclusion usuelle.

Définition 1.32. (Voisinage). *Soient A et B des parties de E. On dit que B est un voisinage de A lorsqu'il existe un ouvert O de E tel que $A \subset O \subset B$, ou, ce qui est équivalent, lorsque $A \subset \mathrm{Int}_E B$. Si $A = \{x\}$, on dit simplement que B est un voisinage de x. On note $\mathscr{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.*

Remarque. On notera l'ambiguïté de la terminologie : la notion de voisinage n'est pas reliée à la notion de proximité. En effet, dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $]0,1]$ est un voisinage de tout point de $]0,1[$ mais pas de 0. En fait, une partie est un voisinage d'un point si ce point est entouré par cette partie. En particulier, l'ensemble total E est un voisinage de chacun de ses points.

La proposition suivante est une traduction immédiate en termes de voisinages des notions d'ouvert, d'intérieur, d'adhérence et de frontière.

Proposition 1.33. *Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique.*
1. *Une partie A de E est ouverte si et seulement si A est un voisinage de chacun de ses points.*
2. *Un point x de E est intérieur à A si et seulement si A est un voisinage de x.*
3. *Un point x est adhérent à A si et seulement si tout voisinage V de x rencontre A.*
4. *Un point x est un point frontière pour A si et seulement si tout voisinage de x rencontre à la fois A et $\mathscr{C}_E(A)$.*

Voici d'autres notions habituellement définies au moyen de voisinages.

Définition 1.34. (Point isolé, point d'accumulation). *Soit A une partie de E.*
1. *Un point x de A est dit isolé dans A s'il existe un voisinage V de x dans E tel que $V \cap A = \{x\}$.*
2. *Un point x de E est dit point d'accumulation de A si tout voisinage de x dans E rencontre A en un point autre que x.*

Test 1.11.

Soit $A = [0, 1[\cup\{2\}$. Déterminer les points isolés de A et les points d'accumulation de A.

Test 1.12.

Un point d'accumulation de A est-il nécessairement dans A ?

Test 1.13.

Montrer qu'une partie A de E est discrète si et seulement si tout point de A est isolé.

La proposition suivante précise le lien entre points d'accumulation et point isolé.

Proposition 1.35. *Soit A une partie de E. On note $\mathrm{Ac}(A)$ l'ensemble des points d'accumulation de A et $\mathrm{Is}(A)$ l'ensemble des points isolés de A. Alors,*

$$\mathrm{Ac}(A) \cap \mathrm{Is}(A) = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Adh}_E A = \mathrm{Ac}(A) \cup \mathrm{Is}(A).$$

Preuve. Les égalités $\mathrm{Ac}(A)\cap\mathrm{Is}(A) = \varnothing$ et $\mathrm{Ac}(A)\cup\mathrm{Is}(A) \subset \mathrm{Adh}_E A$ se déduisent des définitions. Soit $x \in \mathrm{Adh}_E A$. Si $x \notin A$, alors tout voisinage de x rencontre A en un point autre que x, donc $x \in \mathrm{Ac}(A)$. Si $x \in A$, deux cas peuvent se produire : $x \in \mathrm{Is}(A)$ ou $x \notin \mathrm{Is}(A)$. Si $x \notin \mathrm{Is}(A)$, alors tout voisinage V de x vérifie $V \cap A \supsetneq \{x\}$, donc $V \cap A$ contient un point de A différent de x et donc $x \in \mathrm{Ac}(A)$. ■

La proposition suivante montre que la topologie induite respecte la notion de voisinage.

Proposition 1.36. *Soit $A \subset E$ et $B \subset A$. Une partie $C \subset A$ est un voisinage de B dans A si et seulement s'il existe un voisinage C' de B dans E tel que $C = C' \cap A$.*

Preuve. On peut d'abord écrire $\mathrm{Int}_A(C) = O' \cap A$, où O' est un ouvert de E. On voit ensuite que $C = A \cap (O' \cup C)$; on peut donc choisir $C' = O' \cup C$, voisinage de B dans E.
Réciproquement, $B \subset \mathrm{Int}_E(C')$, donc $B \subset A \cap \mathrm{Int}_E(C') \subset \mathrm{Int}_A(C)$, donc C est un voisinage de B dans A. ■

La notion suivante est importante.

Définition 1.37. (Système fondamental de voisinages). *Soit A une partie de E. Un système fondamental de voisinages de A est un ensemble $\mathscr{U}$ de voisinages de A tel que tout voisinage de A contient un élément de l'ensemble $\mathscr{U}$.*

Exemple 1.38.
1. Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{U} = \{]a - \alpha, a + \alpha[,\ \alpha \in \mathbb{Q}^{*+}\}$ ou encore l'ensemble $\mathscr{V} = \{]a - 1/n, a + 1/n[,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ sont des systèmes fondamentaux de voisinages du point $a \in \mathbb{R}$.
2. Plus généralement, dans un espace métrique, l'ensemble des boules centrées en un point est un système fondamental de voisinages de ce point.
3. De manière encore plus générale, si $\mathscr{B}$ est une base pour la topologie de E, l'ensemble (non vide) des éléments de $\mathscr{B}$ contenant un point $x \in E$ est un système fondamental de voisinages ouverts de x. Un point possède donc toujours un système fondamental de voisinages ouverts.

Comme pour les bases de topologie, le rôle des systèmes fondamentaux de voisinages est de simplifier les démonstrations. Par exemple, si A est une partie de E, pour montrer qu'un point x est adhérent à A, il suffit de vérifier que, pour tout élément U d'un système fondamental de voisinages de x donné, l'intersection $U \cap A$ est non vide.

I.6. Parties denses

La notion de densité formalise le problème de l'approximation des éléments d'un ensemble par ceux d'un autre ensemble. Là encore, on cherche à se ramener à des ensembles plus petits et dont on comprend mieux les propriétés. Nous en verrons de nombreux exemples dans la suite.

Définition 1.39. (Densité). *Soient* A *et* B *des parties de* E*. On dit que* A *est dense dans* B *lorsque* $B \subset \mathrm{Adh}_E A$*, ou, ce qui est équivalent, lorsque tout ouvert de* E *contenant un point de* B *rencontre* A*.*

Remarque. La définition de la densité de A dans B n'exige pas que la partie A soit contenue dans la partie B. Par exemple, $]0,1[\cup\{2\}$ est dense dans $[0,1]$. La densité de A dans B signifie que tout élément de B peut être approché d'aussi près que l'on veut par un élément de A.

La proposition suivante, de démonstration immédiate, donne un premier exemple d'utilisation pratique de la notion de base de topologie.

Proposition 1.40. *Soit* $\mathscr{B}$ *une base pour la topologie de* E*. Pour que* A *soit dense dans* B*, il faut et il suffit que tout élément de* $\mathscr{B}$ *contenant un point de* B *rencontre* A*. En particulier, pour que* A *soit dense dans* E*, il suffit que tout élément de* $\mathscr{B}$ *contienne un point de* A*.*

Exemple 1.41. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont des parties denses dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie de l'ordre. En effet, on sait que tout intervalle réel de longueur non nulle contient un rationnel et un irrationnel. La proposition précédente permet de conclure puisque l'ensemble des intervalles ouverts est une base pour la topologie de l'ordre.

Test 1.14.

Soient A et B des parties de E. La densité de A dans B entraîne-t-elle que $A \cap B$ est dense dans le sous-espace B muni de la topologie induite ?

Même question si B est ouvert.

Test 1.15.

Que dire d'un espace E discret qui possède une partie dense A ?

Pour illustrer la notion de densité, on donne maintenant quelques propriétés topologiques des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.42. *Un sous-groupe additif de* $\mathbb{R}$ *est soit discret (et de la forme* $\alpha\mathbb{Z}$ *pour un réel* $\alpha \in \mathbb{R}^+$*), soit dense dans* $\mathbb{R}$*. En particulier, un sous-groupe fermé de* $\mathbb{R}$ *est soit* $\mathbb{R}$*, soit de la forme* $\alpha\mathbb{Z}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}^+$*.*

Preuve. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Si $G = \{0\}$, il est discret et de la forme $0\,\mathbb{Z}$. Supposons donc $G \neq \{0\}$. Alors par symétrie, la partie $G_+ = \mathbb{R}^{*+} \cap G$ est non vide. Comme G_+ est minorée, sa borne inférieure existe, on la note α.
Étape 1. Supposons $\alpha > 0$. Montrons d'abord que $\alpha \in G_+$. Par l'absurde, supposons que $\alpha \notin G_+$. Par définition de la borne inférieure, il existe $x \in G_+$ tel que $x \in]\alpha, 2\alpha[$ et, de même, il existe $y \in G_+$ tel que $y \in]\alpha, x[$. Comme G_+ est un groupe additif, $x - y \in G_+$ et par construction $0 < x - y < \alpha$, ce qui contredit le fait que α est la borne inférieure de G_+. On a donc $\alpha \in G^+$.
Soit maintenant $z \in G_+$. On pose $r = z - [\frac{z}{\alpha}]\,\alpha$, où le crochet désigne la partie entière. D'une part, comme $\alpha \leqslant z$, on a $r \in [0, \alpha[$; et, d'autre part, comme $\alpha \in G_+$, $[z/\alpha]\,\alpha \in G_+$ et donc $r \in G_+$. Finalement, $r \in [0, \alpha[\cap G_+$ et par définition de α cette intersection est égale au singleton $\{0\}$, donc $r = 0$. On en déduit que $z = [z/\alpha]\alpha$, autrement dit que $z \in \alpha\mathbb{N}$ et donc que $G_+ \subset \alpha\,\mathbb{N}$. Par symétrie, il en résulte que $G \subset \alpha\,\mathbb{Z}$. Mais comme $\alpha \in G$, $\alpha\,\mathbb{Z} \subset G$, donc $G = \alpha\,\mathbb{Z}$ et G est discret.

Étape 2. Supposons $\alpha = 0$. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, notons x son centre et $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ son rayon. Comme $\alpha = 0$, il existe un élément $u \in G_+$ tel que $u < \varepsilon$. On remarque que $u\mathbb{Z} \cap I \neq \varnothing$ (car $0 < u < \varepsilon$ et I est de longueur 2ε). Or $u \in G_+$, donc $u\mathbb{Z} \subset G$, donc $G \cap I \neq \varnothing$. Ainsi G rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, donc G est dense dans $\mathbb{R}$, puisque l'ensemble des intervalles ouverts est une base pour la topologie de $\mathbb{R}$. ■

I.7. Espaces séparés

La notion d'espace séparé que l'on va définir est très importante dans la suite, car elle assure notamment l'unicité de la limite d'une fonction lorsqu'elle existe.

Définition 1.43. (Séparation). *Un espace topologique $(E, \mathscr{T})$ est dit séparé lorsque, pour tous points distincts x et y de E, il existe des voisinages disjoints V_x et V_y de x et y respectivement.*

Exemple 1.44.
1. Un espace discret est toujours séparé, un espace grossier à au moins deux éléments n'est jamais séparé.
2. Sur $E = \{0, 1\}$, la topologie $\{\varnothing, \{0\}, E\}$ est non séparée puisque le seul ouvert contenant 1 est E et que $0 \in E$.
3. $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ est séparée ainsi que $\mathbb{R}$ muni de la topologie la plus fine engendrée par $\{[a, b[, a < b\}$. Plus généralement, si $(E, \mathscr{T})$ est séparé, alors toute topologie sur E plus fine que $\mathscr{T}$ est aussi séparée.
4. Tout espace métrique est séparé.

Test 1.16.

Montrer que, dans un espace séparé, tout singleton est fermé.

Test 1.17.

Montrer qu'un espace topologique séparé fini est discret.

Test 1.18.

Que dire d'un espace topologique séparé E qui possède une partie dense finie A ?

Dans un espace séparé, on peut *isoler* deux singletons au sens où il existe deux ouverts disjoints contenant chacun un des singletons. Dans la suite, nous verrons des exemples d'espaces où on peut isoler un singleton $\{x\}$ et un fermé F si $x \notin F$ (espaces réguliers) et deux fermés disjoints (espaces normaux).

II. Continuité et limite

Une notion essentielle que l'on définit au moyen d'ouverts est celle de continuité d'une application d'un espace topologique dans un autre.

II.1. Continuité globale et locale

Définition 1.45. (Continuité globale). *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ et $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques. Une application f de E dans F est dite continue sur E si l'image réciproque par f d'un ouvert quelconque de F est un ouvert de E.*

Exemple 1.46.
1. Si E est un espace discret, toute application de E dans un espace topologique est continue. Si F est un espace grossier, toute application d'un espace topologique dans F est continue.
2. Toute application constante d'un espace topologique $(E, \mathscr{T})$ dans un autre est continue : l'image réciproque d'une partie quelconque (en particulier ouverte) est $\varnothing$ ou E.
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application t_a de $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $t_a(x) = x + a$ est continue. En effet, tout ouvert $O \in \mathscr{T}_u$ s'écrit sous la forme $O = \cup_{i \in I}]\alpha_i, \beta_i[$, où, pour tout $i \in I$, $\alpha_i \in \mathbb{R}, \beta_i \in \mathbb{R}$ et $\alpha_i < \beta_i$. On a donc

$$t_a^{-1}(\cup_{i \in I}]\alpha_i, \beta_i[) = \cup_{i \in I} t_a^{-1}(]\alpha_i, \beta_i[) = \cup_{i \in I}]\alpha_i - a, \beta_i - a[.$$

Ainsi, $t_a^{-1}(O) \in \mathscr{T}_u$ et t_a est continue. De la même manière, on montre que les applications suivantes (et beaucoup d'autres) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont continues : $x \mapsto \lambda x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$; $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $x \mapsto exp(x)$.
4. On rappelle que la fonction caractéristique d'une partie A de E est notée 1_A et que c'est la fonction définie sur E qui vaut 1 sur A et 0 sur $\mathscr{C}_E A$. La fonction caractéristique $1_{\mathbb{R}^+}$ n'est pas continue : l'image réciproque de l'ouvert $]1/2, 3/2[$ est $\mathbb{R}^+$, ce n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

La proposition suivante est souvent utile.

Proposition 1.47. *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ et $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques et f une application de E dans F. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. f est continue.
2. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.
3. Pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Preuve. Montrons que l'assertion 1 entraîne l'assertion 3 : soient $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$. Soit O un ouvert de F contenant $f(a)$. $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E qui contient $a \in \overline{A}$, donc il existe $x \in f^{-1}(O) \cap A$ et donc $f(x) \in O \cap f(A)$. Ainsi $O \cap f(A) \neq \varnothing$, donc $f(a) \in \overline{f(A)}$ et finalement $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
Ensuite, on montre que l'assertion 3 implique l'assertion 2 : soient B un fermé de F et $A = f^{-1}(B)$. Comme $f(A) \subset B$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$ et donc $\overline{A} \subset f^{-1}(B) = A$ et A est fermé.
On a immédiatement que l'assertion 2 implique l'assertion 1, car $\forall B \subset F, \mathscr{C}_E(f^{-1}(B)) = f^{-1}(\mathscr{C}_F B)$, ce qui termine la preuve. ■

Test 1.19.

Soient $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ deux topologies sur E. À quelle condition l'application identité de $(E, \mathscr{T}_1)$ dans $(E, \mathscr{T}_2)$ est-elle continue ?

Test 1.20.

Montrer que $f : (E, \mathscr{T}_E) \to (F, \mathscr{T}_F)$ est continue si et seulement si $f^{-1}(\mathscr{T}_F)$ est moins fine que $\mathscr{T}_E$.

Test 1.21.

Montrer que l'image par une application continue $f : E \to F$ d'un ensemble A dense dans E est dense dans F.

Voici un nouvel exemple d'utilisation des bases de topologies.

Proposition 1.48. *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ et $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques et $\mathscr{B}_F$ une base pour la topologie $\mathscr{T}_F$. Une application f de E dans F est continue si et seulement si, pour tout élément O de $\mathscr{B}_F$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.*

Preuve. La condition est immédiatement nécessaire car $\mathscr{B}_F \subset \mathscr{T}_F$.
Réciproquement, soit $O \in \mathscr{T}_F$, on peut écrire $O = \cup_{i\in I} O_i$, où $O_i \in \mathscr{B}_F$ pour tout $i \in I$. Comme $f^{-1}(O) = \cup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$, l'hypothèse $f^{-1}(O_i) \in \mathscr{T}_E$ pour tout $i \in I$ entraîne $f^{-1}(O) \in \mathscr{T}_E$. On en déduit que f est continue. ■

Définition 1.49. (Continuité en un point). *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ et $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques, f une application de E dans F et x un point de E. On dit que f est continue au point x si, pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U) \subset V$. De manière équivalente, f est continue au point x si, pour tout voisinage V de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x.*

Exemple 1.50.
La fonction $1_{\mathbb{R}^+}$ est continue en tout point $x \in \mathbb{R}^*$ mais n'est pas continue en 0.

La proposition suivante est l'analogue local de la proposition 1.48.

Proposition 1.51. *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ et $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques, f une application de E dans F et x un point de E. f est continue au point x si et seulement si, pour tout élément V d'un système fondamental de voisinages de $f(x)$, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x.*

Le corollaire suivant donne la caractérisation (bien connue!) de la continuité locale dans les espaces métriques. Il provient immédiatement du fait que l'ensemble des boules centrées en un point est un système fondamental de voisinages de ce point.

Proposition 1.52. *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, f une application de E dans F et x un point de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. f est continue au point x.
2. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $f(B(x, \alpha)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in E, d_E(x, y) < \alpha \Longrightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Exemple 1.53.
1. La fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
2. La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\,\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ est continue au point 0 et non continue en tout autre point.

Remarque. Nous verrons dans le chapitre 5 que la donnée d'une distance permet de définir la continuité uniforme qui affine la notion de continuité que l'on vient de définir.

La proposition suivante établit le lien attendu entre local et global.

Proposition 1.54. *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ et $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques et f une application de E dans F. Alors, f est continue sur E si et seulement si elle est continue en tout point de E.*

Preuve. Soient $x \in E$ et V un ouvert de F contenant $f(x)$. L'ensemble $f^{-1}(V)$ est un ouvert contenant x, donc un voisinage de x. Ceci montre que f est continue au point x puisque l'ensemble des ouverts contenant x est un système fondamental de voisinages de $f(x)$.
Réciproquement, soient O un ouvert de F et $x \in f^{-1}(O)$. Comme O est un voisinage de $f(x)$, la continuité de f en x entraîne que $f^{-1}(O)$ est un voisinage de x. Donc, $f^{-1}(O)$ est un voisinage de chacun de ses points, donc c'est un ouvert de E. ■

Attention **Application ouverte, application fermée**

En général, l'image directe d'un ouvert (respectivement fermé) par une application continue n'est pas ouverte (respectivement fermée). Par exemple, dans $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$, l'image de l'ouvert $]0,1[$ par l'application constante égale à 0 est le singleton $\{0\}$, donc elle n'est pas ouverte ; et l'image du fermé $\mathbb{R}$ par l'application exponentielle est $\mathbb{R}^{+*}$, donc elle n'est pas fermée.

Définition 1.55. (Application ouverte, application fermée).
1. *Une application* f *est ouverte si l'image directe de tout ouvert par* f *est un ouvert.*
2. *Une application* f *est fermée si l'image directe de tout fermé par* f *est un fermé.*

Les exemples suivants illustrent le fait qu'il n'existe pas de lien en général entre les notions d'applications ouvertes, fermées et continues.

Exemple 1.56.
1. L'application de $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_g)$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_d)$, qui vaut -1 sur $\mathbb{R}^{-*}$, 0 en 0 et 1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, est ouverte, fermée et non continue.
2. L'application de $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$ constante égale à 0 est continue, fermée et non ouverte.
3. L'application de $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_g)$ constante égale à 0 est continue, non fermée et non ouverte.

Test 1.22.

Soit $f : E \to F$. Montrer que f est ouverte $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset E, f(\mathring{A}) \subset \widehat{f(A)}^{\circ}$ et que f est fermée $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset E, \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

II.2. Opérations sur la continuité

II.2.1. Continuité et composition

La proposition suivante est presque évidente, mais essentielle : la composition préserve la continuité.

Proposition 1.57. *Soient* $(E, \mathscr{T}_E)$, $(F, \mathscr{T}_F)$ *et* $(G, \mathscr{T}_G)$ *trois espaces topologiques,* f *une application de* E *dans* F *et* g *une application de* F *dans* G.
1. *Si* f *et* g *sont continues, la composée* $g \circ f$ *est continue.*
2. *Si* f *est continue en un point* $x \in E$, *et si* g *est continue au point* $f(x) \in F$, *la composée* $g \circ f$ *est continue au point* x.

Preuve. **Étape 1.** Si O est un ouvert de G, $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$ est un ouvert de E, par continuité de f et g.
Étape 2. Soit V un voisinage de $g \circ f(x)$. Par continuité de f au point x, $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ est un voisinage de x, puisque $g^{-1}(V)$ est un voisinage de $f(x)$, par continuité de g au point $f(x)$. ∎

II.2.2. Continuité et restriction

Proposition 1.58. *Soient* $(E, \mathscr{T}_E)$ *un espace topologique et* A *une partie de* E *munie de la topologie induite. L'injection canonique du sous-espace* A *dans* E *est continue.*

Preuve. Notons i l'injection canonique de A dans E. Soit U un ouvert de E. Alors $i^{-1}(U) = U \cap A$ est un ouvert de A par définition de la topologie induite. ■

Proposition 1.59. *Soient* $(E, \mathscr{T}_E)$ *et* $(F, \mathscr{T}_F)$ *deux espaces topologiques,* f *une application continue de* E *dans* F.
1. Si on restreint l'espace de départ de f *à une partie* A *de* E *munie de la topologie induite, alors la restriction notée* $f|_A : A \to F$ *est continue.*
2. Si on restreint l'espace d'arrivée de f *à une partie* B *de* F *munie de la topologie induite, telle que* $f(E) \subset B$, *alors la restriction notée* $f|^B : E \to B$ *de* f *est continue.*

Preuve. **Étape 1.** En notant i l'injection canonique de A dans E, on peut écrire $f|_A = f \circ i$, et f_A est alors continue comme composée de fonctions continues.
Étape 2. Soit O un ouvert de B pour la topologie induite. Il existe $U \in \mathscr{T}_F$, tel que $O = U \cap B$. On a alors $(f|^B)^{-1}(O) = (f|^B)^{-1}(U) \cap (f|^B)^{-1}(B) = f^{-1}(U) \cap E = f^{-1}(U)$ et, par continuité de f, $f^{-1}(U) \in \mathscr{T}_E$, donc $f|^B$ est continue. ■

Exemple 1.60. La restriction f de l'application Identité de $\mathbb{R}$ à l'intervalle $[0,1]$ est continue, l'image réciproque de l'ouvert $]-1/2, 1/2[$ est $[0, 1/2[$, ouvert dans $[0,1]$ (topologie induite), mais non ouvert dans $\mathbb{R}$.

Remarque. Notons une difficulté liée à la terminologie. Avec les notations précédentes, dire que f est continue en tout point de A n'est pas équivalent à dire que la restriction $f|_A$ est continue. Par exemple, si $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ et $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, la fonction f n'est continue en aucun point, alors que sa restriction à $\mathbb{Q}$ est constante, donc continue. Cependant, si f est continue en tout point de A, cela implique que $f|_A$ est continue.

II.2.3. Somme et produit d'applications numériques continues

Notons tout d'abord que, pour des applications dont l'espace d'arrivée est un espace topologique quelconque, on ne peut parler ni de somme, ni de produit ! Pour le faire, il faudra rajouter des structures particulières (espaces vectoriels, corps, etc.). Dans le cas des applications à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la continuité est respectée par les opérations algébriques naturelles.

Proposition 1.61. *Soit* $(E, \mathscr{T})$ *un espace topologique. Si* f *et* g *sont deux applications continues de* E *dans* $\mathbb{K}$, $f + g$ *et* fg *sont aussi continues. L'ensemble* $\mathscr{C}^0(E, \mathbb{K})$ *des applications continues de* E *dans* $\mathbb{K}$ *est donc une algèbre pour les lois usuelles.*

Preuve. On montre la continuité de $f + g$ et fg en tout point. C'est évident pour $f + g$. Pour fg, considérons un point $x_0 \in E$ et fixons un réel $\varepsilon_0 > 0$. Soit $M = \max(|g(x_0)|, |f(x_0)|) + 1$ et soit $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $2M\varepsilon < \varepsilon_0$. Par continuité de f et g en x_0, il existe un voisinage V de x_0 qui vérifie

$$\forall x \in V,\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon,\ |g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Alors, comme

$$(fg)(x) - (fg)(x_0) = f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0)),$$

$$|(fg)(x) - (fg)(x_0)| \leqslant M|g(x) - g(x_0)| + M|f(x) - f(x_0)| \leqslant 2M\varepsilon < \varepsilon_0,$$

ce qui montre la continuité de fg au point x_0. ■

II.3. Continuité et densité, prolongements des égalités et inégalités

Ce paragraphe permet de montrer une première utilisation de la notion de continuité, directement liée à celle de densité : pour démontrer l'égalité de deux applications continues sur un espace topologique (à valeurs dans un espace séparé), il suffit de démontrer leur égalité sur une partie dense.

Exemple 1.62. Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace topologique. Si f est une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$, nulle sur une partie dense A de E, alors elle est nulle sur E. Comme l'ensemble $F = f^{-1}(\{0\})$ est fermé et contient A, F contient $\overline{A} = E$, donc $F = E$ et f est nulle sur E.

La proposition suivante généralise cet exemple.

Proposition 1.63. *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ un espace topologique, $(F, \mathscr{T}_F)$ un espace topologique séparé et f et g deux applications continues de E dans F. L'ensemble $\mathscr{E} = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E. En conséquence, si f et g sont égales sur une partie dense A de E, elles sont égales sur E.*

Preuve. Commençons par remarquer que l'espace d'arrivée n'est pas forcément un espace vectoriel ; on ne peut pas utiliser la fonction $f - g$ et écrire $\mathscr{E} = (f - g)^{-1}\{0\}$! Il faut donc traduire en termes ensemblistes la relation d'égalité des deux applications. On introduit pour cela la diagonale $\Delta = \{(x, x),\ x \in F\}$ de $F \times F$. On a vu que Δ est un fermé de $F \times F$, puisque F est séparé. L'application c de E dans $F \times F$ définie par $c(x) = (f(x), g(x))$ est continue, donc l'ensemble $c^{-1}(\Delta) = \mathscr{E}$ est un fermé de E. La dernière assertion est claire. ■

Exemple 1.64. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(nx) = n\,f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Montrons que f est une homothétie de $\mathbb{R}$. En posant $x = 1$ dans la relation que vérifie f, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = f(1)n$. Puis, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, en posant $x = 1/n$, on obtient $f(1/n) = \frac{f(1)}{n}$. Enfin, en posant $x = 1/q$, $q \in \mathbb{Z}^*$, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(\frac{n}{q}) = nf(1/q) = f(1)\frac{n}{q}$. Ainsi les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f(1)x$ sont égales sur $\mathbb{Q}$, qui est dense dans $\mathbb{R}$. Comme elles sont continues, on en déduit qu'elles sont égales sur $\mathbb{R}$ et donc que f est une homothétie de rapport $f(1)$.

II.4. Homéomorphismes

Les homéomorphismes sont les isomorphismes de la structure topologique, ils permettent d'identifier deux espaces topologiques *a priori* distincts.

Définition 1.65. (Homéomorphisme). *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ et $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques. Un homéomorphisme de E dans F est une application bijective, continue et dont la réciproque est continue. On dit que deux espaces sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme entre eux.*

Exemple 1.66.

1. Une bijection continue n'est pas toujours d'inverse continue. Par exemple, l'application $f : [0, 1[\cup\{2\} \to [0, 1]$, définie par $f|_{[0,1[} = \mathrm{Id}_{[0,1[}$ et $f(2) = 1$, est continue bijective mais son inverse n'est pas continue en 1.
2. Une translation sur $\mathbb{R}$ est continue, son inverse est une translation, donc est aussi continue et donc c'est un homéomorphisme. De même, les homothéties de $\mathbb{R}$ sont des homéomorphismes. On en déduit que deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes. On verra plus loin que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est aussi homéomorphe à $\mathbb{R}$.

3. L'application identité d'un espace $(E, \mathscr{T})$ dans l'espace $(E, \mathscr{T}')$ est un homéomorphisme si et seulement si $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$.
4. Une bijection est un homéomorphisme si et seulement si elle est continue et ouverte, ou encore continue et fermée.

Une propriété très importante des homéomorphismes est qu'ils préservent les notions définies grâce à des ouverts. Pour formaliser cette idée, on introduit le vocabulaire suivant.

Définition 1.67. (Notion topologique). *Soit un ensemble A vérifiant une propriété $\mathscr{P}$. On dit que cette propriété est une notion topologique si l'image de A par un homéomorphisme quelconque vérifie encore cette propriété $\mathscr{P}$.*

Proposition 1.68. *Les propriétés suivantes sont des notions topologiques : être ouvert, fermé ou voisinage d'un point ; être séparé ; être l'adhérence, l'intérieur ou la frontière d'un ensemble.*

Remarque. Nous verrons dans la suite d'autres exemples de notions topologiques, en particulier la compacité et la connexité.

II.5. Limite d'une application en un point

On présente ici une définition purement topologique de la notion de limite.

Définition 1.69. (Limite d'une application en un point). *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ et $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques, A une partie de E et f une application de A dans F. Soient $a \in \overline{A}$ et $l \in F$. On dit que f a pour limite l lorsque x tend vers a (ou au point a), si pour tout voisinage V de l il existe un voisinage U de a dans E tel que $f(A \cap U) \subset V$. Lorsque la limite existe et est unique, on note $\lim_{x \to a} f(x) = l$.*

Avec les notations de la définition, il faut bien noter que le point a considéré n'appartient pas nécessairement à l'ensemble de départ A de f. D'autre part, on vérifie facilement que f a pour limite $l \in F$ lorsque x tend vers a si et seulement si, pour tout élément V d'un *système fondamental de voisinages* donné de l dans F, il existe un voisinage U de a dans E tel que $f(A \cap U) \subset V$. Or, dans un espace métrique, les boules centrées en un point forment un système fondamental de voisinages de ce point. En conséquence, on obtient la caractérisation (bien connue) de la limite dans les espaces métriques.

Proposition 1.70. *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, $A \subset E$, $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $l \in F$. Alors, f a pour limite l au point a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall x \in A, d_E(x, a) < \delta \Longrightarrow d_F(f(x), l) < \varepsilon.$$

Exemple 1.71.
1. Si $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = 1/x$, f n'a pas de limite au point 0. Si on considère f comme fonction à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
2. Si $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = \sin 1/x$, f n'a pas de limite au point 0.

Proposition 1.72. *Avec les notations de la définition, $l \in \overline{f(A)}$.*

Preuve. Si V est un voisinage de l dans F, par définition de l il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap A) \subset V$. Comme $U \cap A$ est non vide et comme $f(U \cap A) \subset f(A)$, V rencontre $f(A)$. Donc, l est dans $\overline{f(A)}$. ■

Attention **Unicité de la limite ?**

Si l'espace d'arrivée F n'est pas séparé, une fonction peut avoir plusieurs limites en un même point. Par exemple, si F est un espace grossier, tout point de F est limite de f au point a.

La proposition suivante montre que si l'espace d'arrivée est séparé, alors, si la limite existe, elle est unique. C'est une application importante de la notion de séparation.

Proposition 1.73. *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ et $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques. On suppose F séparé. Alors, si une fonction f d'une partie A de E dans F possède une limite en un point $a \in \overline{A}$, cette limite est unique.*

Preuve. Supposons que l et l' soient limites de f au point a. Alors, si $l \neq l'$, il existe des ouverts disjoints U et U' contenant l et l' respectivement. On peut trouver des ouverts O et O', voisinages de a, tels que $f(O \cap A) \subset U$ et $f(O' \cap A) \subset U'$. On en déduit que $f(O \cap O' \cap A) \subset U \cap U'$, mais $O \cap O' \cap A \neq \varnothing$ puisque $a \in \overline{A}$ et $O \cap O' \in \mathscr{V}(a)$, donc $U \cap U' \neq \varnothing$, ce qui est contradictoire. ■

Exemple 1.74. Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F séparé et A une partie de E munie de la topologie induite. Si $a \in A$, alors f est continue au point a si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

La proposition suivante est importante et de démonstration immédiate, c'est une généralisation aux limites des résultats sur la composition d'applications continues.

Proposition 1.75. *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$, $(F, \mathscr{T}_F)$ et $(G, \mathscr{T}_G)$ trois espaces topologiques, A une partie de E, B une partie de F, f une application de A dans F, g une application de B dans G et a un point de $\overline{A}$. On suppose que f a pour limite $l \in \overline{B}$ au point a et que g a pour limite l' au point l. Alors, la fonction composée $g \circ f$ a pour limite l' au point a.*

Exemple 1.76. (Prolongement par continuité). Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ et $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques, A une partie de E, f une application continue de A dans F et $a \in \overline{A}$. Un prolongement par continuité de f à $A \cup \{a\}$ est une application continue g de $A \cup \{a\}$ dans F, égale à f dans A. Un tel prolongement existe si et seulement si f possède une limite au point a. On pose alors $g(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. Par exemple, la fonction définie par $f(x) = \sin(1/x)$ ne possède pas de prolongement par continuité à $\mathbb{R}^+$. En revanche, la fonction de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = x \sin(1/x)$ se prolonge par continuité à $\mathbb{R}^+$ (et son prolongement est nul en 0).

III. Construction d'espaces topologiques

On étudie maintenant deux procédés de construction d'espaces topologiques, directement liés à la notion de continuité : le produit et le quotient d'espaces. On décrit aussi brièvement des problèmes plus généraux, celui des topologies initiales et finales, qui permet de mieux comprendre les idées présentées.

III.1. Espaces produits

Problème de la topologie initiale : soient E un ensemble, $(F_i, \mathscr{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications, avec, pour tout $i \in I$, f_i de E dans F_i. On s'intéresse aux topologies $\mathscr{T}$ sur E telles que chaque f_i soit continue de $(E, \mathscr{T})$ dans $(F_i, \mathscr{T}_i)$; on notera $\mathscr{A}$ l'ensemble de ces topologies. Il est clair que la topologie discrète sur E est dans $\mathscr{A}$ et c'est la topologie la plus fine ayant cette propriété. On voit aussi que, si $\mathscr{T}$ est dans $\mathscr{A}$, toute topologie $\mathscr{T}'$ sur E plus fine que $\mathscr{T}$ est aussi dans $\mathscr{A}$. Il est donc naturel de s'intéresser à la topologie *la moins fine* appartenant à $\mathscr{A}$. On a vu que l'intersection d'une famille quelconque de topologies sur E est une topologie sur E. L'intersection des éléments de $\mathscr{A}$ est donc précisément la topologie la moins fine cherchée. Cette topologie est dite topologie *initiale* sur E pour les données $(F_i, \mathscr{T}_i)_{i\in I}$ et $(f_i)_{i\in I}$.

Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vides et $E = \Pi_{i\in I} E_i$ son produit. Il existe alors naturellement une famille $(p_i)_{i\in I}$ de surjections canoniques de E sur les E_i : les projections canoniques. La projection canonique p_i de $E = \prod_{j\in I} E_j$ dans E_i est l'application qui à $x \in E$ associe $x_i \in E_i$, où x_i est la i-ième composante de x. Ceci conduit, lorsque les E_i sont des espaces topologiques, à la définition suivante.

Définition 1.77. (Topologie produit). *Soient $(E_i, \mathscr{T}_i)$ une famille d'espaces topologiques, $E = \prod_{i\in I} E_i$ leur ensemble produit et, pour tout $i \in I$, p_i la projection canonique de E sur E_i. La topologie produit sur E est la topologie initiale sur E pour les données $(E_i, \mathscr{T}_i)_{i\in I}$ et $(p_i)_{i\in I}$. C'est donc la topologie la moins fine de E pour laquelle toutes les projections p_i sont continues. On notera $\otimes_{i\in I}\mathscr{T}_i$ la topologie produit des topologies $\mathscr{T}_i$.*

Dans toute la suite de ce paragraphe, on conserve les notations de la définition. La topologie produit est facile à décrire : elle possède une base particulièrement simple.

Définition 1.78. (Rectangle élémentaire). *On appelle rectangle élémentaire de E toute partie R de E de la forme*
$$R = \bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(O_j),$$
où les parties O_j sont des ouverts de E_j, et où J est une partie finie de I.

Remarque. Une manière équivalente de définir un rectangle élémentaire est la suivante : un rectangle élémentaire est une partie R de E de la forme
$$R = \prod_{i\in I} O_i,$$
avec $O_i = E_i$ sauf pour un nombre fini d'indices $i \in I$. Cette dernière description est plus maniable en pratique et justifie d'ailleurs la dénomination rectangle ; la description de la définition précédente est utile dans les démonstrations théoriques.

La proposition suivante explique en particulier pourquoi, dans la définition des rectangles, on se limite à des parties J finies.

Proposition 1.79. *L'ensemble $\mathscr{R}$ des rectangles élémentaires de E est une base de topologie sur E. La topologie engendrée par $\mathscr{R}$ est la topologie produit. Un ouvert pour la topologie produit est donc une réunion de rectangles élémentaires.*

Preuve. Il est clair que E est un rectangle élémentaire, donc la réunion des éléments de $\mathscr{R}$ est bien égale à E. On voit immédiatement, d'après la définition, que l'intersection de deux rectangles élémentaires est encore un rectangle élémentaire. La partie $\mathscr{R}$ est donc bien une base de topologie.

Notons $\mathscr{T}_P$ la topologie produit et $\mathscr{T}$ la topologie engendrée par $\mathscr{R}$. Comme les applications p_i sont continues si E est muni de la topologie $\mathscr{T}_P$, les ensembles de la forme $p_i^{-1}(O_i)$, où O_i est un ouvert de $\mathscr{T}_i$, sont ouverts dans $\mathscr{T}_P$. En conséquence, les rectangles élémentaires sont dans $\mathscr{T}_P$, comme intersections finies d'ouverts. Il en résulte que $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_P$ par définition de $\mathscr{T}$.
Réciproquement, si $i \in I$ est donné et si O_i est un ouvert de E_i, l'image réciproque $p_i^{-1}(O_i)$ est un rectangle élémentaire, donc l'application p_i est continue pour $\mathscr{T}$. Il en résulte que $\mathscr{T}_P \subset \mathscr{T}$ par définition de $\mathscr{T}_P$ et donc $\mathscr{T}_P = \mathscr{T}$. ■

Exemple 1.80.
Sur $\mathbb{R}^n$, un rectangle élémentaire est de la forme $\prod_{i=1}^n \cup_{k\in K} \,]a_k^i, b_k^i[$, où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $k \in K$, $a_k^i \in \overline{\mathbb{R}}, b_k^i \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a_k^i < b_k^i$. Un ouvert pour cette topologie est une réunion quelconque de ces rectangles élémentaires.

Remarque. Nous verrons plus loin des exemples de topologies produits sur des produits infinis ; ils interviennent de manière naturelle dans les problèmes de convergence simple de suites de fonctions.

La proposition suivante est un critère important de continuité des fonctions à valeurs dans un espace topologique produit.

Proposition 1.81. *Soit f une application d'un espace topologique $(F, \mathscr{T}_F)$ dans un espace topologique produit $(\otimes_{i\in I} E, \otimes_{i\in I} \mathscr{T}_i)$. Alors, f est continue si et seulement si, pour tout $i \in I$, $f_i = p_i \circ f$ est continue.*

Preuve. Les projections sont continues, donc toutes les composantes d'une application continue sont continues par composition. Réciproquement, supposons que toutes les composantes f_i de f sont continues. Il suffit de montrer que l'image réciproque par f d'un rectangle élémentaire $R = \cap_{j\in J} p_j^{-1}(O_j)$ est ouverte dans F. Mais $f^{-1}(R) = \cap_{j\in J} f_j^{-1}(O_j)$ est un ouvert de F, puisque J est finie. ■

Attention

Il n'existe pas de résultat analogue pour les applications définies sur un espace produit : la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$, n'est pas continue en $(0, 0)$; mais ses applications partielles $x \mapsto g(x, 0)$ et $y \mapsto g(0, y)$ sont nulles, donc en particulier continues en 0.

On s'intéresse maintenant aux liens qui existent entre topologie produit et séparation.

Proposition 1.82. *Soient I un ensemble quelconque et $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques séparés. Alors, l'espace $E = \prod_{i\in I} E_i$ muni de la topologie produit est séparé.*

Preuve. Soient $\xi = (x_i)_{i\in I}$ et $\eta = (y_i)_{i\in I}$ deux éléments distincts de E. Alors, il existe un indice i_0 tel que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Comme E_{i_0} est séparé, il existe deux voisinages ouverts disjoints A et B de x_{i_0} et y_{i_0} respectivement. Les ensembles $p_{i_0}^{-1}(A)$ et $p_{i_0}^{-1}(B)$ sont des rectangles élémentaires disjoints de E, ils contiennent ξ et η respectivement et ils sont ouverts. Le produit E est donc séparé. ■

Le résultat suivant est un critère utile de séparation.

Proposition 1.83. *Soit* $(E, \mathscr{T})$ *un espace topologique. Alors,* $(E, \mathscr{T})$ *est séparé si et seulement si la diagonale* $\Delta = \{(x, x) \mid x \in E\}$ *est un fermé de l'espace produit* $E \times E$.

Preuve. Soient x et y deux points distincts de E. Le couple (x, y) est donc dans $E \times E \backslash \Delta$. L'ensemble $E \times E \backslash \Delta$ est un ouvert contenant (x, y) si et seulement s'il existe deux ouverts O_x et O_y, voisinages de x et y respectivement, tels que $O_x \times O_y$ soit contenu dans $E \times E \backslash \Delta$, ou, de manière équivalente, si et seulement si $O_x \cap O_y = \varnothing$. ■

Remarque. Si $n \geqslant 3$, il y a plusieurs manières de munir un produit de n espaces topologiques d'une structure topologique. Par exemple, si on donne trois espaces E_1, E_2, E_3, il est possible de munir d'abord $E_1 \times E_2$ de la structure produit, puis $(E_1 \times E_2) \times E_3$ de la structure produit, ou directement $E_1 \times E_2 \times E_3$... On admet que tous ces procédés sont équivalents, dans le sens où ils donnent la même topologie.

III.2. Espaces quotients

Problème de la topologie finale : soient F un ensemble, $(E, \mathscr{T}_E)$ un espace topologique et f une application de E dans F. On s'intéresse maintenant aux topologies sur F telles que f soit continue ; on note $\mathscr{A}$ leur ensemble. Il est clair que la topologie grossière sur F est dans $\mathscr{A}$ et c'est la topologie la moins fine de F ayant cette propriété. Si $\mathscr{T} \in \mathscr{A}$, toute topologie $\mathscr{T}'$ sur F moins fine que $\mathscr{T}$ est aussi dans $\mathscr{A}$. Il est donc naturel de s'intéresser à la topologie *la plus fine* de $\mathscr{A}$, si elle existe.

Proposition 1.84. *L'ensemble* $\mathscr{T}_f = \{O \in \mathscr{P}(F) \mid f^{-1}(O) \in \mathscr{T}_E\}$ *est une topologie sur* F*, c'est le plus grand élément de* $\mathscr{A}$*.*

Preuve. On vérifie immédiatement que $\mathscr{T}_f$ est une topologie sur F et clairement f est continue si F est muni de cette topologie. Si $\mathscr{T}'$ est une topologie sur F rendant f continue, tout élément O de $\mathscr{T}'$ vérifie $f^{-1}(O) \in \mathscr{T}$, donc $O \in \mathscr{T}_f$ et donc $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}_f$. Il en résulte que $\mathscr{T}_f$ est le plus grand élément de $\mathscr{A}$. ■

La topologie $\mathscr{T}_f$ est appelée topologie *finale* associée aux données $(E, \mathscr{T}_E)$ et f. L'exemple le plus important de topologie finale est celui de la topologie quotient, que nous définissons maintenant.

Définition 1.85. (Topologie quotient). *Soient* $(E, \mathscr{T})$ *un espace topologique,* $\mathscr{R}$ *une relation d'équivalence sur* E *et* q *la surjection canonique de* E *sur* $E/\mathscr{R}$*, qui à un élément* x *de* E *associe sa classe modulo* $\mathscr{R}$*. La topologie quotient* $\mathscr{T}_q$ *sur* $E/\mathscr{R}$ *est par définition la topologie finale sur* $E/\mathscr{R}$ *pour les données* $(E, \mathscr{T})$ *et* q *; c'est donc la topologie la plus fine sur* $E/\mathscr{R}$ *rendant continue la surjection canonique* q*. Elle est définie par*

$$\mathscr{T}_q = \{O \in \mathscr{P}(F) \mid q^{-1}(O) \in \mathscr{T}\}.$$

Exemple 1.86. Les espaces quotients s'introduisent naturellement lors de l'étude de fonctions présentant des symétries. Par exemple, considérons une fonction T-périodique f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et notons $G = T\mathbb{Z}$ son groupe de périodes. Alors, si $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/G$ est la projection canonique, on voit qu'il existe une unique application $\tilde{f}$ de $\mathbb{R}/G$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie $f = \tilde{f} \circ q$. Pour traduire cette dernière relation, on dit que le diagramme suivant est donc commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}/G \arrow[ur, "\tilde{f}"] & \end{tikzcd}$$

> Bien que l'espace $\mathbb{R}/G$ soit « plus petit » que l'espace de départ $\mathbb{R}$, la donnée de $\tilde{f} : \mathbb{R}/G \to \mathbb{R}$ permet de reconstruire f ; c'est l'un des intérêts de la notion.

On généralise l'exemple précédent à toute relation d'équivalence et on adopte le vocabulaire suivant.

Définition 1.87. (Passage au quotient, diagramme commutatif). *Si f est une application d'un ensemble E dans un ensemble F et si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E, on dit que f passe au quotient sur $E/\mathscr{R}$ si elle est constante sur les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$, c'est-à-dire si*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathscr{R}y \Longrightarrow f(x) = f(y).$$

Il existe alors une unique application $\tilde{f}$ de $E/\mathscr{R}$ dans F telle que $f = \tilde{f} \circ q$. On dit alors que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & F \\ E/\mathscr{R} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

où q est la projection. On dit que $\tilde{f}$ est l'application quotient de f.

Dans le cas où les espaces sont topologiques et l'application f continue, on peut poser le problème de la continuité de $\tilde{f}$, lorsque $E/\mathscr{R}$ est muni de la topologie quotient.

Attention — **La surjection canonique $q : E \to E/\mathscr{R}$ n'est pas injective !**

Dans l'exemple 1.86, q n'est pas injective car $q(x) = q(x+T)$. L'égalité $f = \tilde{f} \circ q$ ne peut donc pas se réécrire $\tilde{f} = f \circ q^{-1}$ puisque l'application *réciproque* q^{-1} n'existe pas ! En revanche, dans la preuve suivante, q^{-1} désigne l'application *image réciproque* ; elle est définie sur l'ensemble des parties de $E/\mathscr{R}$ et elle existe toujours.

Proposition 1.88. *Soient $(E, \mathscr{T}_E)$ et $(F, \mathscr{T}_F)$ deux espaces topologiques, f une application continue de E dans F et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E. On munit $E/\mathscr{R}$ de la topologie quotient. Si f passe au quotient sur $E/\mathscr{R}$, alors son application quotient est continue.*

Preuve. Notons q la surjection canonique de E dans $E/\mathscr{R}$ et $\tilde{f}$ l'application quotient de f. Soit O un ouvert de F. Alors, comme $f = \tilde{f} \circ q$,

$$q^{-1}(\tilde{f}^{-1}(O)) = (\tilde{f} \circ q)^{-1}(O) = f^{-1}(O)$$

et $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E, ce qui montre que $\tilde{f}^{-1}(O)$ est un ouvert de Q par définition de la topologie quotient. Il en résulte que $\tilde{f}$ est continue. ■

Attention — **Séparation des espaces quotients ?**

Une des difficultés des espaces quotients est qu'ils ne sont en général pas séparés, même si l'espace de départ l'est. Lorsqu'on travaille sur des espaces quotients, il faut donc systématiquement se poser la question de la séparation ou non de l'espace.

Exemple 1.89. Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\mathscr{R}y \iff x=y=0 \text{ ou } xy\neq 0.$$

$\mathbb{R}$ est séparé et on va montrer que $\mathbb{R}/\mathscr{R}$ muni de la topologie quotient n'est pas séparé. Décrivons tout d'abord $\mathbb{R}/\mathscr{R}$. Deux réels non nuls sont en relation et 0 n'est en relation qu'avec lui-même. $\mathscr{R}$ a donc deux classes d'équivalence notées $\overline{0}=q(0)=\{0\}$ et $\overline{1}=q(1)=\mathbb{R}^*$. L'espace quotient contient deux éléments : $\mathbb{R}/\mathscr{R}=\{\overline{0},\overline{1}\}=\{\{0\},\mathbb{R}^*\}$. On munit $\mathbb{R}/\mathscr{R}$ de la toplogie quotient $\mathscr{T}_q$: une partie A de $\mathbb{R}/\mathscr{R}$ est donc ouverte si et seulement si $q^{-1}(A)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Or, $q^{-1}(\overline{0})=\{0\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$ et $q^{-1}(\overline{1})=\mathbb{R}^*$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, donc

$$\mathscr{T}_q=\{\mathbb{R}/\mathscr{R},\varnothing,\overline{1}\}.$$

On a vu dans l'exemple 1.44 que cette topologie à trois ouverts sur un espace à deux éléments n'est pas séparée.

La proposition suivante donne un critère de séparation des quotients.

Proposition 1.90. *Soient $(E,\mathscr{T})$ un espace topologique et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E. On suppose que la projection q de E sur $E/\mathscr{R}$ est ouverte. On note*

$$\mathcal{G}=\{(x,y)\in E\times E \mid q(x)=q(y)\}$$

le graphe de la relation $\mathscr{R}$. Alors l'espace quotient $E/\mathscr{R}$, muni de la topologie quotient, est séparé si et seulement si $\mathcal{G}$ est fermé dans $E\times E$ muni de la topologie produit.

Preuve. Si l'espace quotient est séparé, d'après la proposition 1.83, la diagonale $\Delta_{E/\mathscr{R}}$ est fermée dans $(E/\mathscr{R})^2$ et donc $\mathcal{G}=(q\times q)^{-1}(\Delta_{E/\mathscr{R}})$ est fermé dans $E\times E$ puisque l'application $q\times q$ est continue.
Réciproquement, soient a et a' deux éléments distincts de $E/\mathscr{R}$. Alors, si $x\in q^{-1}(\{a\})$ et $x'\in q^{-1}(\{a'\})$, le couple (x,x') est dans le complémentaire de $\mathcal{G}$ dans $E\times E$. Il existe donc deux ouverts O et O' de E, contenant x et x', tels que le rectangle élémentaire $O\times O'$ ne rencontre pas $\mathcal{G}$. Il en résulte que $q(O)$ et $q(O')$ sont deux ouverts disjoints, contenant a et a', ce qui montre que $E/\mathscr{R}$ est séparé. ■

IV. Exercices

1.1. ⋆

Montrer que si un espace topologique $(E,\mathscr{T})$ est séparé, alors, pour toute partie A de E, l'ensemble des points d'accumulation de A est fermé dans E.

1.2. ⋆

Montrer que si A est ouvert, alors $\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}A)=\varnothing$. Est-ce vrai si A est fermé ? Si A est quelconque ?

1.3. ⋆

Soient E un ensemble et $\mathscr{T}_c=\{E,\varnothing\}\cup\{F\in\mathscr{P}(E);\ F \text{ est fini }\}$.
1. Montrer que $\mathscr{T}_c$ est une topologie.
2. Montrer que $(E,\mathscr{T}_c)$ est séparée si et seulement si E est fini.
3. Si $E=\mathbb{R}$, montrer que la topologie des cofinis est strictement moins fine que la topologie usuelle $\mathscr{T}_u$.

1.4. ⋆⋆

Soient A un anneau commutatif unitaire et P un idéal de A. On rappelle que P est premier si le quotient A/P est intègre. Le spectre de A noté $S(A)$ est l'ensemble des idéaux premiers de A. Pour un idéal I de A, on note $V(I)$ l'ensemble des idéaux premiers de A qui contiennent I.

Montrer que $\mathscr{F} = \{V(I) \mid I \text{ idéal de } A\}$ est l'ensemble des fermés d'une topologie sur $S(A)$, dite topologie spectrale.

1.5. ⋆

Un ensemble arithmétique de $\mathbb{Z}$ est une partie de $\mathbb{Z}$ soit vide, soit de la forme $A_{a,b} = \{na + b \mid n \in \mathbb{Z}\}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.
1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{B}$ des ensembles arithmétiques est une base de topologie sur $\mathbb{Z}$ et qu'un ensemble arithmétique est fermé pour la topologie engendrée par $\mathscr{B}$.
2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini. (On pourra considérer la réunion R de tous les ensembles arithmétiques $A_{p,0}$, où p est un nombre premier.)

1.6. ⋆

Soit $\mathscr{B} = \{[x, +\infty[,\ x \in \mathbb{R}\}$.
1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de topologie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{T}$ la topologie engendrée par $\mathscr{B}$. Donner les ouverts et les fermés de $\mathscr{T}$.
2. Donner l'adhérence et l'intérieur d'un singleton, de $[0, 1]$ et de $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Cette topologie est-elle séparée ?

1.7. ⋆

Soient $(E, \mathscr{T})$ un espace topogique, $A \subset E$ et $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.
1. On considère $\mathbf{1}_A$ comme une application de $(E, \mathscr{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$.
a. Montrer que $\mathbf{1}_A$ est continue en un point $x \in E$ si et seulement si $x \notin \mathrm{Fr} A$.
b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbf{1}_A$ soit continue sur X, puis pour que toutes les fonctions indicatrices soient continues sur X.
2. On considère maintenant $\mathbf{1}_A$ comme une application de $(E, \mathscr{T})$ dans $(\{0, 1\}, \mathscr{T}_1)$ où $\mathscr{T}_1 = \{\{0, 1\}, \varnothing, \{1\}\}$.
a. Montrer que $\mathbf{1}_A$ est continue en $x \in E \Leftrightarrow x \notin A \cap \mathrm{Fr} A$.
b. Même question que 1b.

1.8. ⋆⋆⋆

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans un ensemble E. Une période de f est un réel p tel que $f(x + p) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{P}(f)$ des périodes de f est soit discret, soit dense dans $\mathbb{R}$.
2. Donner un exemple de fonction qui admet un groupe de périodes discret, puis un exemple de groupe de périodes dense.
3. Donner un exemple de fonction non constante pour laquelle $\mathscr{P}(f)$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que, si f est continue, $\mathscr{P}(f)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
5. Montrer que l'ensemble des périodes $\mathscr{P}(f)$ d'une application continue f soit est $\mathscr{P}(f) = \mathbb{R}$ et f est constante, soit il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $P(f) = \alpha\mathbb{Z}$.

1.9. ⋆

Soit $E = E_1 \times .. \times E_n$ un produit de n espaces topologiques muni de la topologie produit.
1. Montrer que, pour tout $i \in \{1, n\}$ et tout $A_i \subset E_i$,

$$\overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad \text{et} \qquad \overset{\circ}{\overbrace{\prod_{i=1}^{n} A_i}} = \prod_{i=1}^{n} \overset{\circ}{A_i}.$$

2. Montrer qu'un produit est fermé si et seulement si chacun de ses facteurs est fermé.
3. Montrer que E est séparé si et seulement si chaque E_i est séparé.

1.10. ⋆⋆

Soient E un espace topologique, $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E et $\pi : E \to E/\mathscr{R}$ la surjection canonique.
1. Montrer que $\forall B \subset E/\mathscr{R}$, $\pi(\pi^{-1}(B)) = B$ et que, en général, $\forall A \subset E$, $\pi^{-1}(\pi(A)) \neq A$. Donner l'inclusion qui est vraie.
2. On dit que $A \subset E$ est saturé si $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. Montrer que, pour tout $U \subset E/\mathscr{R}$, $\pi^{-1}(U)$ est saturé.
3. Donner un exemple simple de partie non saturée.

1.11. ⋆⋆

Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ définie par : $x \sim y$ ssi $x - y \in \mathbb{Z}$. On note $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence muni de la topologie quotient et $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection canonique.
1. q est-elle injective ?
2. Montrer que q est ouverte.
3. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la topologie quotient est-il séparé ?

1.12. ⋆⋆

Soient $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 = 1\}$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$ et $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (voir exercice 1.11).
1. Montrer que $f : \mathbb{R} \to S^1$ définie par $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ passe au quotient en une application notée $\tilde{f}$.
2. Montrer que $\tilde{f}$ est bijective et continue.